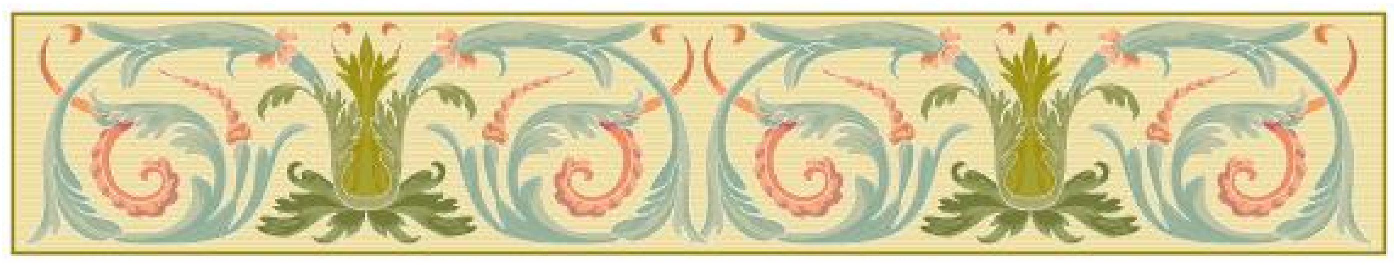


المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
الإدارة العامة للتربية والتعليم
بمنطقة نجران (بنين)
مركز الإشراف التربوي بشرورة
وزارة التربية والتعليم
شعبة الرياضيات
نادي معلمي الرياضيات "الورقي"
6.15%
في الإسلام
٠٥٠٥٧٥٩١١٨
الكتاب السنوى الثانى
١٤٢٦-١٤٢٧هـ

بسم الله الرحمن الرحيم





الإهداء

إلى كل معلم

يؤمن برسالته الطاهرة

وبأنه صاحب التوقيع الأخير في كتاب تاريخ أمته

وأنه صاحب المهمة لعودة الريادة

إليه وحده نهديه منجزنا



القسم الأول

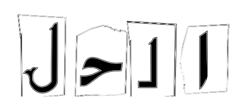


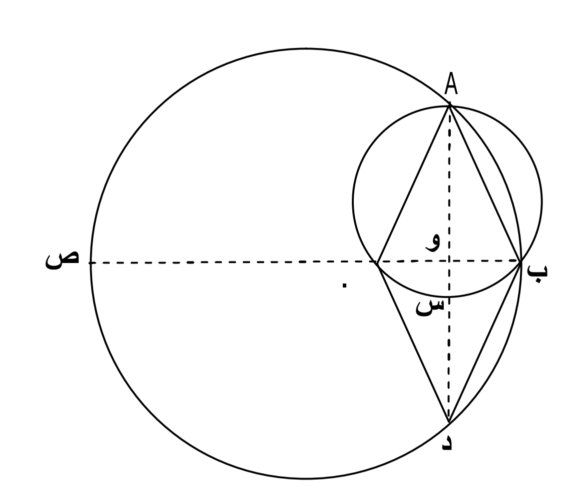
المشكلات وحلولها

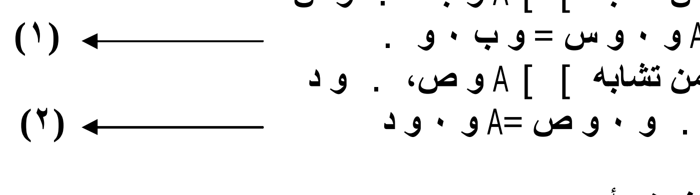
١

أوجد مساحة المعين A ب د . الذي تمر الدائرة الصغرى (, ، $\frac{١}{٢}$ ١٢ سم) بالرؤوس A ، ب ، . والدائرة الكبرى (; ،٢٥ سم) تمر بالرؤوس A، ب، د.

(المصدر : مسابقة الأولمبياد الأمريكية رقم ٣٢ – مايو ٢٠٠٣)







نفرض أن:
و نقطة تقاطع قطري المعين Aد ، ب .
Aد V محيط الدائرة الصغرى= {س}،
} ب V محيط الدائرة الكبرى = {ص}.

من تشابه]]A و ب ، . و س
A و ٠ و س = و ب ٠ و . (١)
من تشابه]]A و ص، . و د
. و ٠ و ص =A و ٠ و د (٢)

نفرض أن :
Aد = ٢ ' ، ب . = ٢ K
بالتعويض في (١) ، (٢)
' (٢٥- ') = $K^{٢}$ (٣)
K (٥٠- K)= $'^{٢}$ (٤)

من (٣)
$K^{٢}$ + $'^{٢}$ = ٢٥ '
من(٤)
$K^{٢}$ + $'^{٢}$ = ٥٠ K
E ٥٠ K = ٢٥ ' ومنها ' = ٢K

بالتعويض في (٤)
K =١٠ ، ' = ٢٠
E **مساحة المعين** = $\frac{١}{٢}$ × Aد × ب .

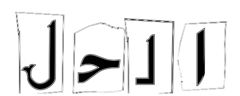
= $\frac{١}{٢}$× (٢×١٠) ×(٢×٢٠) = ٤٠٠ سم٢

٢

اثبت أن :

$$\frac{1}{\sqrt{2005}} > \frac{2003}{2004}\times\frac{2001}{2002}\times\cdots\cdots\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$$

(المصدر : مسابقة ولاية ألينوي الأمريكية – ٢٠٠٥)



نفرض أن :

$$\frac{2003}{2004}\times\frac{2001}{2002}\times\cdots\cdots\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = S$$

$$\frac{2004}{2005}\times\frac{2002}{2003}\times\cdots\cdots\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3} = X$$

نلاحظ من الفرض أن :

$$S < X$$

ومنها

$$^{2}S < X\ S$$

$$\frac{1}{2005} = X\ S\ E$$

$$\frac{1}{2005} > {}^{2}S\ E \qquad \textbf{(بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2005}} > S\ E$$

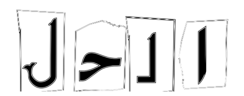


إذا كانت S ، X ، Y ثلاثة **أعداد مختلفة تأخذ الاحتمال من** ١ إلى ٩

أوجد أصغر قيمة للعدد :

$$\frac{Y\ X\ S}{Y + X + S}$$

(المصدر : اولمبياد جنوب أفريقيا للصفوف (٨ – ٩) الدور الثالث ٢٠٠٤)



من المطلوب نلاحظ أن :-

S **تمثل الآحاد ،** X **تمثل العشرات ،** Y **تمثل المئات**

$$Y١٠٠ + X\ ١٠ + S = Y\ X\ S \quad E$$

E **المطلوب من الممكن أن يأخذ الصورة :-**

$$\frac{S\,٩ - Y٩٠ + Y\,١٠ + X\ ١٠ + S\,١٠}{Y + X + S} = \frac{Y\,١٠٠ + X\ ١٠ + S}{Y + X + S} = \frac{Y\ X\ S}{Y + X + S}$$

$$\frac{S\,٩ - Y٩٠}{Y + X + S} + \frac{Y\,١٠ + X\ ١٠ + S\,١٠}{Y + X + S} =$$

$$\frac{(S - Y\,١٠)\,٩}{Y + X + S} + ١٠ =$$

نلاحظ أن أقل قيمة للعدد (Y ١٠ - S) **هي عندما** Y = ١ ، S = ٩

وأكبر قيمة للمقام هي عندما X = ٨ **(وذلك لعدم التكرار)**

$$١٠\frac{١}{٢} = \frac{(١٠ - ٩)\,٩}{١ + ٨ + ٩} + ١٠ = \frac{(S - Y\,١٠)\,٩}{Y + X + S} + ١٠ \quad E$$

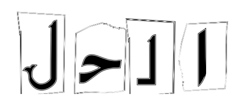
أوجد مجموعة حل النظام

١١ = X S + X + S

١٩ = X S + ٢X + ٢S

حيث S ، X L H

(المصدر : المسابقة المحلية الأسبانية الموحدة ١٩٩٨)



نفرض أن :

١١ = X S + X + S ⟵ (١)

١٩ = X S + ٢X + ٢S ⟵ (٢)

بالجمع

٣٠ = X + S + ٢X + X S ٢ + ٢S

٣٠ = (X + S) +(٢X + X S ٢ + ٢S)

٣٠ =(X + S) + ٢(X + S)

نفرض أن Y = X + S

E ٢Y + Y - ٣٠ = صفر

E (Y +٦) (Y - ٥) = صفر

E S + X = -٦ ⟵ (٣)

، S + X = ٥ ⟵ (٤)

بالتعويض من (٣) في(١)

E S X = ١١+ ٦ = ١٧ (حاصل ضرب جذري المعادلة ل٢ - م ل + ن : حيث ن = ١٧)

ولكن S + X = -٦ (حاصل جمع الجذرين للمعادلة السابقة م = -٦)

E المعادلة التي جذراها S ، X تكون : ل٢ +٦ل + ١٧ وهي معادلة ليس لها حل في H

بالتعويض من (٤) في(١)

E S X = ١١- ٥ =٦

ومنها (S ، X) = (٣،٢) أو (٢،٣) وكلاهما تحققان المعادلة (٢)



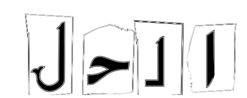
٥

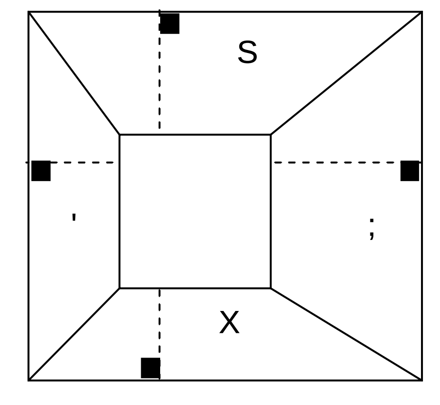
الشكل: يوضح مربعان احدهما داخل الآخر

اثبت أن : -

مساحة شبة المنحرف S + مساحة شبة المنحرف X = مساحة شبة المنحرف ; + مساحة شبة المنحرف '

(المصدر : المسابقة المحلية الأسبانية الموحدة ١٩٩٧)





نفرض أن :

- طول المربع الأكبر هو : Q ، طول المربع الأصغر هو : K
- ارتفاع شبة المنحرف S هو : Y_S
- ارتفاع شبه المنحرف X هو : Y_X
- ارتفاع شبه المنحرف ; هو : $Y_;$
- ارتفاع شبه المنحرف ' هو : $Y_'$

يتضح من الشكل أن :

$$K - Q = Y_' + Y_; = Y_X + Y_S$$

مساحة شبة المنحرف S $= \frac{K + Q}{٢} \times Y_S$

بالمثل مساحة شبه المنحرف X $= \frac{K + Q}{٢} \times Y_X$

E مساحة S + مساحة X $= \left(\frac{K + Q}{٢}\right)\left(Y_X + Y_S\right) = \left(\frac{K + Q}{٢}\right)(K - Q)$

$$= \frac{K^٢ - Q^٢}{٢} \longrightarrow (١)$$

وبالمثل: مساحة ; + مساحة ' $= \left(\frac{K + Q}{٢}\right)\left(Y_' + Y_;\right) = \left(\frac{K + Q}{٢}\right)(K - Q)$

$$= \frac{K^٢ - Q^٢}{٢} \longrightarrow (٢)$$

E من (١) ، (٢)

مساحة شبة المنحرف S + مساحة شبة المنحرف X = مساحة شبة المنحرف ; + مساحة شبة المنحرف '

٦

إذا كانت : جا^{٢} S + جا^{٢} X = جا(S + X)

اثبت أن : $S + X = \frac{ط}{٢}$ **حيث :** S ، X **زاويتان حادتان**

(المصدر : المسابقة المحلية الأسبانية الموحدة ١٩٩٨)

الحل

(سنحاول إثبات أن: $S + X > \frac{ط}{٢}$ **علاقة خاطئة وكذلك** $S + X < \frac{ط}{٢}$ **هي أيضاً علاقة خاطئة)**

جا^{٢} S + **جا**^{٢} X = **جا** S **جتا** X + **جتا** S **جا** X

جا^{٢} S - **جا** S **جتا** X + **جا**^{٢} X - **جتا** S **جا** X = **صفر**

جا S (**جا** S - **جتا** X) + **جا** X (**جا** X - **جتا** S) = **صفر** ⟵ **(١)**

- **نفرض أن :** $S + X > \frac{ط}{٢}$ **علاقة صحيحة**

E $S > \frac{ط}{٢} - X$ **ومنها جا** S > **جا**($\frac{ط}{٢} - X$)

E **جا** S > **جتا** X ⟵ **(٢)**

أو : $X > \frac{ط}{٢} - S$ **ومنها جا** X > **جا**($\frac{ط}{٢} - S$)

E **جا** X > **جتا** S ⟵ **(٣)**

من (١) ، (٢) ،(٣) E **العلاقة (١) موجبة**

- **نفرض أن :** $S + X < \frac{ط}{٢}$ **علاقة صحيحة**

E $S < \frac{ط}{٢} - X$ **ومنها جا** S < **جا**($\frac{ط}{٢} - X$)

E **جا** S < **جتا** X ⟵ **(٤)**

أو : $X < \frac{ط}{٢} - S$ **ومنها جا** X < **جا**($\frac{ط}{٢} - S$)

E **جا** X < **جتا** S ⟵ **(٥)**

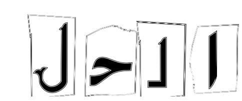
من (١) ، (٤) ،(٥) E **العلاقة (١) سالبة**

E **التناقض يؤدي إلى أن الحالة التي تجعل الطرف الأيمن صفراً هي :** $S + X = \frac{ط}{٢}$

على الشكل:

د منتصف القوس الأصغر A ب . ، د و A y ب ، **أثبت أن :** A و = و ب + ب .

(المصدر : المسابقة المحلية الأسبانية الموحدة ١٩٩٨)



نصل : A د ، ب د ، د .

D د منتصف القوس الأصغر A ب .



E | د . | = | A د| ، ب . د = د A ب

بدوران] د ب . حول النقطة د

فتكون النقطة A صور النقطة . ، وتقع صورة النقطة ب على ب . ولتكن `

E | A ` | = | ب . | ، | د ب | = | د ` | ← (١)

D د و A y ب

E | و ب | = | و ` | ← (٢)

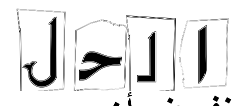
D | A و | = | A ` | + | ` و| ← (٣)

من(١) ، (٢) في (٣)

| A و | = | ب . | + | و ب | .

٨ **أيهما أكبر :** A = $\frac{\text{٢,٠٠٠٠٠٠٤}}{\text{٢,٠٠٠٠٠٠٤} + (\text{١,٠٠٠٠٠٠٤})^{٢}}$ **أو** ب = $\frac{\text{٢,٠٠٠٠٠٠٢}}{\text{٢,٠٠٠٠٠٠٢} + (\text{١,٠٠٠٠٠٠٢})^{٢}}$

(المصدر : المسابقة الأهلية الأمريكية ٢٠٠١)



نفر ض أن :

- **٠,٠٠٠٠٠٠٤= ٢ س   ومنها س = ٠,٠٠٠٠٠٠٢**

A = $\frac{\text{٢+ ٢س}}{(\text{٢ + ٢س}) + (\text{١+٢س})^{٢}}$ = $\frac{\text{٢+ ٢س}}{\text{٢ + ٢س + ١+٤س+ ٤س}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢+ ٢س}}{\text{٣ + ٦ س+ ٤س}^{٢}}$

ب = $\frac{\text{٢+ س}}{(\text{٢ + س}) + (\text{١+س})^{٢}}$ = $\frac{\text{٢+ س}}{\text{٢+ س + ١+٢س+ س}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢+ س}}{\text{٣ + ٣ س+ س}^{٢}}$

بفرض أن :

A > ب   **(إذا كانت س > صفر)**

E $\frac{\text{٢+ ٢س}}{\text{٣ + ٦ س+ ٤س}^{٢}}$ > $\frac{\text{٢+ س}}{\text{٣ + ٣ س+ س}^{٢}}$

E **(٢+ ٢س)(٣ + ٣ س+ س^{٢}) > (٢ + س) (٣ + ٦ س + ٤ س^{٢})**

E**٦+ ٦ س+ ٢ س^{٢} + ٦ س+ ٦س^{٢}+ ٢س^{٣} > ٦ + ١٢ س+ ٨ س^{٢} + ٣س + ٦ س^{٢} + ٤س^{٣}**

E **٢س^{٣} + ٨ س^{٢} +١٢س + ٦ > ٤س^{٣} + ١٤ س^{٢} +١٥ س +٦**

E **٢س^{٣} + ٦ س^{٢} +٣س> صفر**

وهذه العلاقة صحيحة لأي س> صفر

E **الفرض صحيح أي أن :**

A > ب

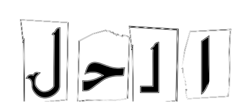
٩

إذا كانت د دالة معرفة علي الأعداد الصحيحة الموجبة .

وكانت : د (١) = ٢٠٠٥ ، د (١) + د (٢) + ... + د(س) = س^{٢}× د (س) **لكل** س > ١

أوجد قيمة د (٢٠٠٤).

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – جنوب أفريقيا ٢٠٠٤)



D د(١) + د(٢) + ... + د(س) = س^{٢} د(س) ⟵ (١)

E د(١) + د(٢) + ... + د(س- ١) = (س- ١)^{٢} د(س-١) ⟵ (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

(س – ١) ^{٢} × د (س – ١) + د(س) = س^{٢} × د (س)

E (س – ١) ^{٢} × د (س – ١) = س^{٢} × د (س) – د(س)

E (س – ١) ^{٢} × د (س – ١) = د(س) × [س^{٢} -١]

E د(س) = $\frac{(\text{س} - 1)^2}{\text{س}^2 - 1}$ د(س- ١)

E د(س) = $\frac{(\text{س} - 1)^2}{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}$ د (س – ١)

E د(س) = $\frac{(\text{س} - 1)}{\text{س} + 1}$ د (س – ١)

E د(٢٠٠٤) = $\frac{٢٠٠٣}{٢٠٠٥}$ × د (٢٠٠٣)

= $\frac{٢٠٠٣}{٢٠٠٥}$ × $\frac{٢٠٠٢}{٢٠٠٤}$ د(٢٠٠٢) = $\frac{٢٠٠٣}{٢٠٠٥}$ × $\frac{٢٠٠٢}{٢٠٠٤}$ × $\frac{٢٠٠١}{٢٠٠٣}$ د(٢٠٠١) ....

E د(٢٠٠٤) = $\frac{(٢٠٠٣)(٢٠٠٢)(٢٠٠١)(٢٠٠٠) \ldots\ldots (٣)(٢)(١)}{(٢٠٠٥)(٢٠٠٤)(٢٠٠٣)(٢٠٠٢) \ldots\ldots (٥)(٤)(٣)}$ د (١)

E د(٢٠٠٤) = $\frac{٢ \times ١}{٢٠٠٤ \times ٢٠٠٥}$ د(١) ولكن د(١) = ٢٠٠٥

E د(٢٠٠٤) = $\frac{٢ \times ١}{٢٠٠٤ \times ٢٠٠٥}$ ×٢٠٠٥

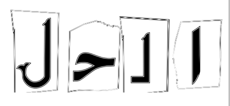
E د(٢٠٠٤) = $\frac{٢}{٢٠٠٤}$ = $\frac{١}{١٠٠٢}$

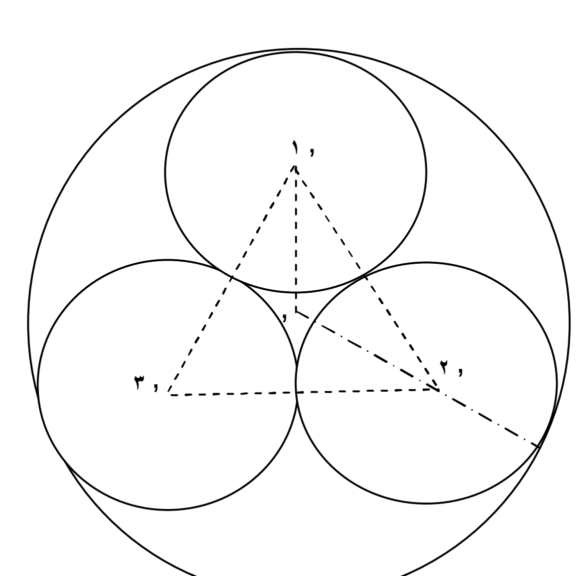
١٠

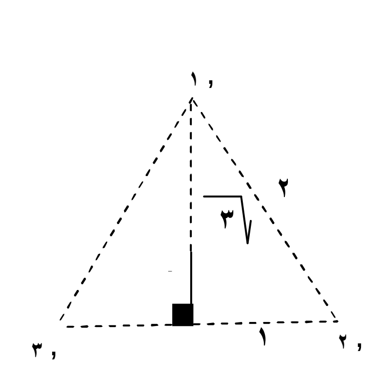
على الشكل :- ١ ، ٢ ، ٣ ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة مثنى مثنى وطول نصف قطر كل منها الوحدة وهذه الدوائر تمس الدائرة الكبرى (، =) من الداخل.

احسب طول نصف قطر الدائرة الكبرى =

(المصدر : مسابقة معهد بوليا – التصفية الأولى - ٢٠٠)







نصل كل من : ١ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ٣ ، ٢

E | ١ ٢ | = | ١ ٣ | = | ٣ ٢ | = ٢

نلاحظ أن :

نصف قطر الدائرة الكبرى =

١ + المسافة بين مركز] ١ ، ٢ ، ٣ وأحد رؤوس نفس المثلث

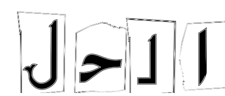
$$= ١ + \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$$

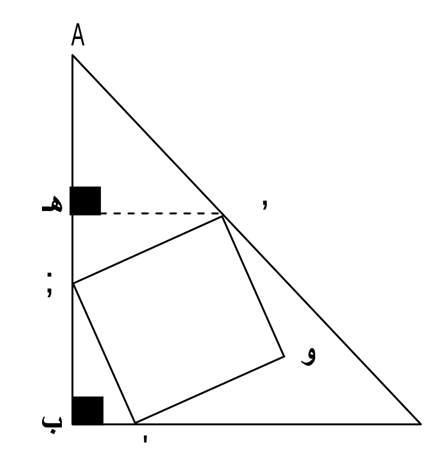
على الشكل : A ب { مثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين. رسم المربع , ; و ' بحيث النقاط :
, ، ; ، ' تقع على أضلاع المثلث : A { ، A ب ، ب { على الترتيب .

إذا كان : |ب '| = S ، |ب ;| = X ، مساحة المربع , ; و ' = $\frac{٢}{٥}$ مساحة [A ب {

احسب :- النسبة S : X

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ١٩٩٧)





نرسم: , هـ y A ب

D ∠ هـ , ; + ∠ , ; هـ = ٩٠° ⟵ (١)

D ∠ , ; هـ + ∠ ' ; ب = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠° ⟵ (٢)

من(١)، (٢)

∠ هـ , ; = ∠ ' ; ب

D [[, هـ ; ، ' ب ;

فيهما { |' ; | = | , ; | ، ∠ , هـ ; = ∠ ب = ٩٠° ، ∠هـ , ; = ∠ ' ; ب }

E يتطابق [[وينتج أن :

|هـ ; | = |ب '| = S ،

|هـ ,| = |ب ; | = X

D هـ , // ب . ، ∠A = ∠ .

E ∠ هـ ,A = ∠ A

E |هـ ,| = |A هـ| = X

E |A ب| = |A هـ| + |هـ ;| + |; ب|

E |A ب| = ٢ X + S = |ب .| .

D مساحة المربع = $\frac{٢}{٥}$ مساحة [A ب }

E $(; ')^{٢} = \frac{٢}{٥} \left(\frac{١}{٢} \; |ب . | \times |A ب| \right)$

E $S^{٢} + X^{٢} = \frac{٢}{٥} \left(\frac{١}{٢} (٢X + S)(٢X + S) \right)$

$S^{٢} + X^{٢} = \frac{١}{٥} (٢X + S)^{٢}$

$٥(S^{٢} + X^{٢}) = ٤X^{٢} + ٤SX + S^{٢}$

$٥S^{٢} + ٥X^{٢} = ٤X^{٢} + ٤SX + S^{٢}$

$٤S^{٢} - ٤SX + X^{٢} =$ صفر

$(٢S - X)^{٢} =$ صفر

$٢S - X =$ صفر

$٢S = X$

$\frac{S}{X} = \frac{١}{٢}$

$S : X = ١ : ٢$

١٢

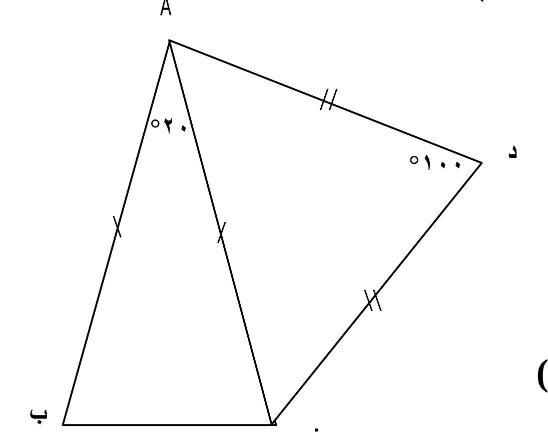
على الشكل : A ب . ، A د . مثلثان **فيهما :–** A| . |=| A ب | ، | د . |=| A د |

، \ . A ب = ٢٠° ، \ A د . =١٠٠°

اثبت أن :

A| ب |=| ب . | + | د . |

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات– ٢٠٠١)



الحل

في] A ب . :-

\ ب = \ A . ب = ٨٠°

من قانون الجيب : $\frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠}} = \frac{\text{. ب}}{\text{جا ٢٠}}$ ⟵ (١)

في] A د . :-

\ A د . = \ د . A = ٤٠ °

من قانون الجيب : $\frac{\text{A .}}{\text{جا ١٠٠°}} = \frac{\text{. د}}{\text{جا ٤٠°}}$

D |A ب |=| A . |

، D جا ١٠٠ °= جا(١٨٠° – ٨٠ °) = جا ٨٠°

E $\frac{\text{A .}}{\text{جا ١٠٠ °}} = \frac{\text{. د}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠ °}}$ ⟵ (٢)

من(١) : | ب . | × جا ٨٠° = A| ب | × جا٢٠°

E | ب . | = $\frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠ °}}$ × جا ٢٠°

من(٢) : | د . | × جا ٨٠ °= A| ب | × جا٤٠°

E | د . | = $\frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠ °}}$ × جا ٤٠°

E **بالجمع :** | ب . |+| د . | = $\frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠ °}}$ (جا ٢٠° + جا ٤٠ °)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{A ب}}{\text{جا٨٠°}}$ (جا ٢٠° + جا(٢ × ٢٠°))

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠}}$ (جا ٢٠° + ٢جا٢٠ °جتا٢٠°)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{A ب}}{\text{جا ٨٠°}}$ جا ٢٠° (١ + ٢ جتا ٢٠ °) ⟵ (٣)

D جا ٨٠ °= جا ٢×٤٠° = ٢جتا٤٠° جا ٤٠ °

= ٢ جتا ٤٠° جا (٢× ٢٠ °)

= ٢ جتا ٤٠° × ٢جا٢٠° جتا ٢٠°

أي أن : جا٨٠ °= ٤ جتا ٤٠° جا ٢٠ ° جتا ٢٠ ° ⟵ (٤)

بالتعويض من (٣) في (٤)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{|A ب|}}{\text{٤ جتا ٤٠° جا ٢٠° جتا ٢٠°}}$ × جا ٢٠° (١ + ٢ جتا٢٠°)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{|A ب|}}{\text{٤ جتا ٤٠° جتا ٢٠°}}$ × (١ + ٢ جتا٢٠°)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{|A ب|}}{\text{٤ جتا ٤٠° جتا ٢٠°}}$ × ٢($\frac{١}{٢}$ + جتا٢٠°)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{|A ب|}}{\text{٢جتا ٤٠° جتا ٢٠°}}$ × ($\frac{١}{٢}$ + جتا٢٠)

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{|A ب|}}{\text{٢جتا ٤٠° جتا ٢٠°}}$ × (جتا ٦٠°+ جتا٢٠°)

D جتا ٦٠+ جتا٢٠ = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$(٦٠° + ٢٠°) جتا $\frac{١}{٢}$(٦٠°- ٢٠°) = ٢ جتا ٤٠° جتا٢٠°

E | ب . |+| د . | = $\frac{\text{|A ب|}}{\text{٢جتا ٤٠° جتا ٢٠°}}$ × ٢ جتا ٤٠° جتا٢٠°

E |A ب |= | ب . | + | د . |.

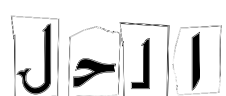
١٣

أوجد خارج قسمة:-

$$\text{س}^{١} + \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{س}^{٤} + ٠٠٠٠٠٠ + \text{س}^{١٠٠}$$

$$\text{على}\quad \text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٣} + \text{س}^{-٤} + ٠٠٠٠٠٠ + \text{س}^{-١٠٠}$$

(المصدر : مسابقة ولاية فلوريدا الأمريكية –ربيع ٢٠٠٠)



$$\text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٣} + \text{س}^{-٤} + ... + \text{س}^{-١٠٠} = \text{س}^{-١٠١}(\text{س}^{١٠٠} + \text{س}^{٩٩} + ... + \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س})$$

$$E \quad \frac{\text{س} + \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{س}^{٤} + ... + \text{س}^{١٠٠}}{\text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٣} + \text{س}^{-٤} + ٠٠٠٠٠٠ + \text{س}^{-١٠٠}}$$

$$= \frac{\text{س} + \text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{س}^{٤} + ... + \text{س}^{١٠٠}}{\text{س}^{-١٠١}(\text{س}^{١٠٠} + \text{س}^{٩٩} + ... + \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س})}$$

$$= \frac{١}{\text{س}^{-١٠١}}$$

$$= \text{س}^{١٠١}.$$

١٤

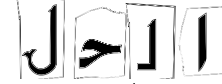
أوجد قيم : S ، X ، Y التي تحقق النظام

$$S - \sqrt{X\,Y} = ٤٢$$

$$X - \sqrt{S\,Y} = ٦$$

$$Y - \sqrt{S\,X} = -٣٠$$

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ١٩٩٧)



نفرض أن :

• S = A^٢ ، X = ب^٢ ، Y = .^٢ **(حيث A ، ب ، . في توال عددي)**

E **المعادلات الثلاثة تأخذ الصورة :**

A^٢ – ب . = ٤٢ ⟵ **(١)**

ب^٢ - A . = ٦ ⟵ **(٢)**

.^٢ - A ب = -٣٠ ⟵ **(٣)**

بجمع (١) ، (٢) : A^٢ + ب^٢ - A . – ب . = ٤٨ ⟵ **(٤)**

D A ، ب ، . متغيرات

E ب = (A + .) / ٢ ⟵ **(٥)**

بالتعويض من (٥) في (٤)

E A^٢ + ((A + .)/٢)^٢ - A . – ((A + .)/٢) . = ٤٨

E A^٢ + A^٢/٤ + .^٢/٤ + A./٢ - A./٢ - .^٢/٢ - A . = ٤٨ **بالضرب ×٤**

E ٤A^٢ + A^٢ + .^٢ + ٢A. - ٢A. - ٢.^٢ - ٤A . = ١٩٢

E ٥A^٢ - .^٢ - ٤A . = ١٩٢ ⟵ **(٦)**

بجمع (١) ،(٣)

A^٢ + .^٢ - ب . – ب A = ١٢

$$١٢ = \left(A\left(\frac{. + A}{٢}\right)\right) - \left(. \quad \left(\frac{. + A}{٢}\right)\right) - {}^{٢}. + {}^{٢}A$$

$$١٢ = \left(\frac{{}^{٢}A + . A}{٢}\right) - \left(\frac{{}^{٢}. + . A}{٢}\right) - {}^{٢}. + {}^{٢}A$$ **بالضرب ×٢**

$$٢٤ = . A٢ - {}^{٢}. + {}^{٢}A$$ ⟵ **(٧)**

بجمع (٢) ،(٣)

$$٢٤- = A ب - . A - {}^{٢}. + {}^{٢}ب$$

$$٢٤- = \left(\frac{. + A}{٢}\right) A - . A - {}^{٢}. + {}^{٢}\left(\frac{. + A}{٢}\right) E$$ **بالضرب × ٤**

$$٩٦ -= . A ٤ - {}^{٢}. ٥ + {}^{٢}A -$$ ⟵ **(٨)**

بحل المعادلات الثلاث(٦) ، (٧) ،(٨) في المجاهيل الثلاثة $\{ {}^{٢}A ، {}^{٢}. ، . A \}$

$$٥٤ = S = {}^{٢}A \; E$$

$$٦ = Y = {}^{٢}.$$

بالتعويض في المعادلة : $X - \sqrt{S \; Y} = ٦$

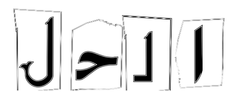
$$X = ١٨ + ٦ = ٢٤$$

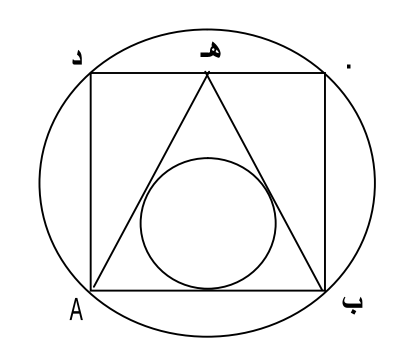
١٥

على الشكل: – A ب هـ **مثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخله الدائرة** (, ، ١) ، **وتنطبق قاعدته على ضلع المستطيل** A ب . د **ورأسه على الضلع المقابل ، و حيث أن المستطيل** A ب . د **يقع داخل الدائرة** (N ، =) .

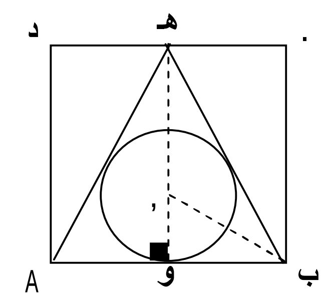
احسب طول =

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ٢٠٠٠)





- نرسم : هـ و y Aب
- نصل : ب ,



E هـ و يمر بالمركز ,

D , ب ينصف ∠ ب

E ∠ , ب و = ٣٠°

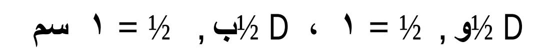
D ½و , ½ = ١ ، D ½ب , ½ = ١ سم

E ½و ب ½ = √٣ سم

E ½ A ب ½ = ٢ √٣ سم

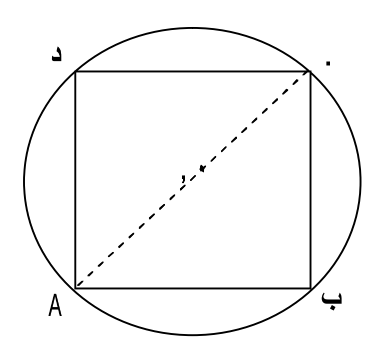
D ½ب , ½ =½هـ , ½ = ٢ سم

E ½هـ و ½ = ٣ سم



E ½ A د ½ =½هـ و ½ = ٣ سم

D قطر المستطيل يمر بمركز الدائرة



E ½ A . ½ = √((٣)² + (٢ √٣)²)

E ½ A . ½ = √٢١

E = = $\frac{\sqrt{21}}{2}$

أوجد جميع قيم , الحقيقية التي تجعل للمعادلة :-

س^{٢} – ٤ س - , - $\sqrt{}$ ٨ س^{٢} – ٣٢ س – ٨ , = صفر حلان حقيقيان مختلفان

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ٢٠٠٤)

الحل

س^{٢} – ٤ س - , - $\sqrt{}$ ٨(س^{٢} –٤س – ,) = صفر

نفرض أن : س^{٢} – ٤ س - , = X

E المعادلة تصبح على الصورة : X - $\sqrt{}$ ٨ X = صفر بالتربيع

E X ^{٢} - ٨ X = صفر

X (X - ٨) = صفر

E إما : X = صفر أو : X = ٨

أي أن : س^{٢} – ٤ س - , = صفر أو : س^{٢} – ٤ س - , = ٨

الحالة الأولى: س^{٢} – ٤ س - , = صفر

مميز المعادلة هو : (-٤)^{٢} + ٤ , = ١٦ + ٤ ,

ومنها:
- المعادلة ليس لها حلول إذا كانت ١٦ +٤ , < صفر ⇐ , < -٤
- المعادلة لها حل وحيد إذا كانت ١٦ +٤ , = صفر ⇐ , = -٤
- المعادلة لها حلان حقيقيان إذا كانت ١٦ +٤ , > صفر ⇐ , > -٤

الحالة الثانية: س^{٢} – ٤ س - , = ٨

س^{٢} – ٤ س – (, + ٨) = صفر

مميز المعادلة هو : (-٤)^{٢} + ٤(, + ٨) = ١٦ + ٤ , + ٣٢ = ٤ , + ٤٨

ومنها:
- المعادلة ليس لها حلول إذا كانت ٤ , + ٤٨ < صفر ⇐ , < -١٢
- المعادلة لها حل وحيد إذا كانت ٤ , + ٤٨ = صفر ⇐ , = -١٢
- المعادلة لها حلان حقيقيان إذا كانت ٤ , + ٤٨ > صفر ⇐ , > -١٢

ولتلخيص واستخلاص الحل نتبع الجدول التالي:

المعادلة	, < -١٢	, = -١٢	-٤> , < -١٢	, = -٤	, > -٤
س^٢ – ٤ س - , = صفر	لا يوجد حل حقيقي	لا يوجد حل حقيقي	لا يوجد حل حقيقي	حل وحيد	حلان حقيقيان
س^٢ – ٤ س - , = ٨	لا يوجد حل حقيقي	حل وحيد	حلان حقيقيان	حلان حقيقيان	حلان حقيقيان
الحلول النهائية	لا يوجد حل حقيقي	حل وحيد	حلان حقيقيان	٣ حلول حقيقية	٤حلول حقيقية

E الحلان الحقيقيان يتحققان إذا كانت , تقع في الفترة]–١٢،–٤[أي أن : -٤> , > -١٢.

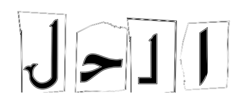
١٧

اثبت أن المثلث الذي أطوال أضلاعه : –

$١٤ \times ١٠^{س+١}$ ، $٤٥ \times ١٠^{٢س+١} - ٢$ ، $٢٤٥ \times ١٠^{٢س+١} + ٢$

هي أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية (حيث س عدد صحيح موجب)

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات– ٢٠٠٣)



نفرض أن أطوال أضلاع المثلث:-

- $S = ١٤ \times ١٠^{س+١}$
- $X = A - ٢$
- $Y = A + ٢$

حيث : $A = ٢٤٥ \times ١٠^{٢س+١}$

$D\ Y^{٢} - X^{٢} = (A + ٢)^{٢} - (A - ٢)^{٢}$

$= (A^{٢} + ٤A + ٤) - (A^{٢} - ٤A + ٤)$

$= A^{٢} + ٤A + ٤ - A^{٢} + ٤A - ٤$

$= ٨A$

$= ٨ \times ٢٤٥ \times ١٠^{٢س+١}$

$= ١٩٦٠ \times ١٠^{٢س+١}$

$= ١٠ \times ١٩٦ \times ١٠^{٢س+١}$

$= (١٤)^{٢} \times (١٠^{س+١})^{٢}$

$= (١٤ \times ١٠^{س+١})^{٢}$

= A S ب . د$_{٢}$ ورأسه على الضلع المقابل ، و حيث أن المستطيل A ب . د يقع داخل الدائرة (N ، =) .

E المثلث قائم الزاوية.

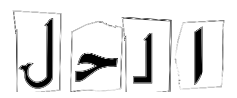
١٨

إذا كانت :

$$S + X + Y = ١$$
$$S^{٢} + X^{٢} + Y^{٢} = ٢$$
$$S^{٣} + X^{٣} + Y^{٣} = ٣$$

احسب قيمة : $S\ X\ Y$

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – أمريكا ١٩٩٧)



- $(S + X + Y)^{٢} = S^{٢} + X^{٢} + Y^{٢} + ٢(S\ X + Y\ S + X\ Y)$

$$(١)^{٢} = ٢ + ٢(S\ X + Y\ S + X\ Y)$$

$$-١ = ٢(S\ X + Y\ S + X\ Y)$$

$$E(S\ X + Y\ S + X\ Y) = \frac{-١}{٢}$$

- $(S + X + Y)^{٣} = S^{٣} + X^{٣} + Y^{٣} + ٣S^{٢}X + ٣X^{٢}Y + ٣Y^{٢}S$
  $+ ٣Y\ S^{٢} + ٣S\ X^{٢} + ٣X\ Y^{٢} + ٦S\ X\ Y$

$$= S^{٣} + X^{٣} + Y^{٣} + ٣(S^{٢}X + ٣X^{٢}Y + ٣Y^{٢}S$$
$$+ ٣Y\ S^{٢} + ٣S\ X^{٢} + ٣X\ Y^{٢} + ٩S\ X\ Y)$$
$$- ٣S\ X\ Y$$

$$= S^{٣} + X^{٣} + Y^{٣} + ٣(S + X + Y)$$
$$(S\ X + Y\ S + X\ Y) - ٣S\ X\ Y$$

$$(١)^{٣} = ٣ + ٣\times(١)\times\left(\frac{-١}{٢}\right) - ٣S\ X\ Y$$

$$١ = ٣ + \frac{-٣}{٢} - ٣S\ X\ Y$$

$$٣S\ X\ Y = ٣ - \frac{٥}{٢} = \frac{١}{٢}$$

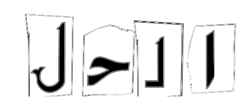
$$E\ S\ X\ Y = \frac{١}{٦}$$

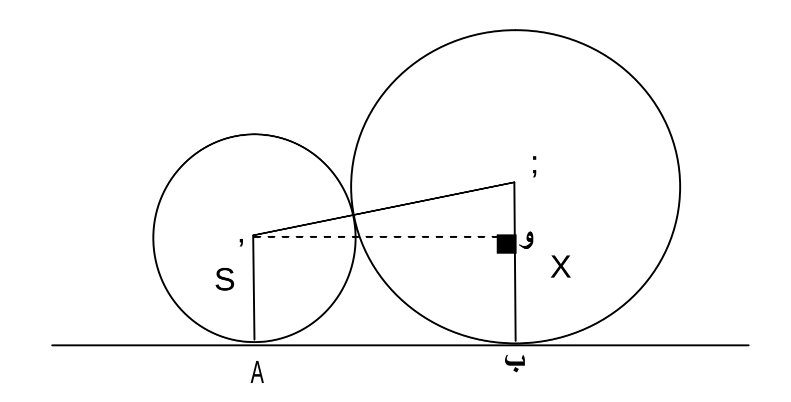
١٩

على الشكل : دائرتان متماستان من الخارج نصفي قطريهما S ، X **يمسان المستقيم ' في** A ، ب

احسب |A ب | **بدلالة** S ، X

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – أمريكا ٢٠٠٠)





نفرض أن :

- **, مركز الدائرة الصغرى .**
- **; مركز الدائرة الكبرى.**

E **الشكل الرباعي** A, **ب ; شبة منحرف**

X + S = ½ , ; ½، X = ½ ; ب ½ ، S = ½ ,A ½ D

نرسم : , و V **; ب = {و} حيث** ½ **ب و** ½ = S

E ½ و ,½ ^٢^ = ½ ; ,½ ^٢^ - ½ و ; ½ ^٢^

= (S + X)^٢^ - (X - S)^٢^

= S ^٢^ + X ^٢^ + ٢ S X - S ^٢^ - X ^٢^ + ٢ S X

= ٤ S X

E ½ و , ½ = ½ A ب ½ = |\ ٤ S X

A ب . د **شكل رباعي مرسوم داخل دائرة** ، A ب V د . = هـ ، A د V ب . ' =

اثبت أن منصف A هـ د y **منصف** A ' ب

(المصدر : مسابقة ولاية فلوريدا الأمريكية –ربيع ٢٠٠٠)

الحل

نفرض أن :-

النقطة K هي نقطة تقاطع منصفي الزاويتين هـ ، ' ، ونصل هـ '

D K هـ . = ١/٢ (A هـ .)

= ١/٢ (١٨٠° - هـ د A - A)

D K ' ب = ١/٢ (A ' ب)

= ١/٢ (١٨٠° - ' ب A - A)

بالجمع :

K هـ . + K ' ب = ١٨٠° - ١/٢ د - ١/٢ A - ١/٢ ب - ١/٢ A

= ١٨٠° - A - ١/٢ (هـ د A + ' ب A)

ولكن: (د + ب) = ١٨٠° خواص الشكل الرباعي الدائري

E K هـ . + K ' ب = ١٨٠° - A - ١/٢ × ١٨٠°

= ١٨٠° - A - ٩٠° = ٩٠° - A ⟵ (١)

في] ' . هـ

D . هـ ' + . ' هـ = ١٨٠° - ' . هـ

D ب . د + A = ١٨٠°

E ب . د = ١٨٠° - A

D ' . هـ = ب . د **بالتقابل بالرأس**

E ∠ . هـ ' + ∠ . ' هـ = ١٨٠° - (١٨٠° - ∠A) = ∠ A ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

E ∠ K هـ . + ∠ K ' ب = ٩٠° - ∠ . هـ ' - ∠ . ' هـ

E ∠ K هـ . + ∠ . هـ ' + ∠K ' ب + ∠ . ' هـ = ٩٠°

∠ K هـ '   ∠ K ' هـ = ٩٠°

E] ' K هـ قائم الزاوية في K

E منصف ∠ A هـ د y منصف ∠ A ' ب.

٢١ أوجد أصغر عدد S يحقق المتباينة:

$$\sqrt{S} - \sqrt{S - ١} < ٠,٠١$$

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – أمريكا ٢٠٠٢)

الحل

$$\left(\sqrt{S} - \sqrt{S - ١}\right) \times \frac{\sqrt{S} + \sqrt{S - ١}}{\sqrt{S} + \sqrt{S - ١}}$$

$$= \frac{S - (S - ١)}{\sqrt{S} + \sqrt{S - ١}} = \frac{١}{\sqrt{S} + \sqrt{S - ١}} < ٠,٠١$$

$$= \frac{١}{\sqrt{S} + \sqrt{S - ١}} < \frac{١}{١٠٠}$$

$$= \sqrt{S} + \sqrt{S - ١} > ١٠٠$$

نلاحظ أن :

$$\sqrt{٢٥٠٠} = ٥٠$$

$$\therefore \sqrt{٢٥٠٠} + \sqrt{٢٤٩٩} < ١٠٠$$

$$، \sqrt{٢٥٠١} + \sqrt{٢٥٠٠} > ١٠٠$$

$\therefore$ **أصغر عدد يحقق المتباينة هو :** $S = ٢٥٠١$

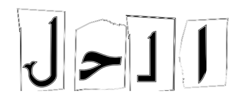
٢٢

لأي عدد موجب S أوجد : د(S)= { ٤(١)^{٢} – ١} × { ٤(٢)^{٢} – ١} ×......× { ٤ S ^{٢} – ١}

مثال : د(١) = ٣ ، د(٢) =٣×١٥= ٤٥

أوجد جميع قيم س التي تجعل د(س) مربع كامل

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – أمريكا ٢٠٠٣)



من الواضح أن :

٤ ص^{٢} - ١ =(٢ص)^{٢} – ١ = (٢ ص – ١) (٢ ص + ١) ، وعلى ذلك :-

د(س) = [(٢(١) -١)(٢(١) + ١)] .... [(٢(س) -١)(٢(س) + ١)]

د(س) = [(١) (٣)] [(٣) (٥)] [(٥) (٧)] [(٢ س – ٣) (٢ س -١)] [(٢ س –١) (٢ س +١)]

د(س) = ١× ٣^{٢}× ٥^{٢} × ٧^{٢}×..........× (٢ س –١)^{٢} (٢ س +١)

وعلى ذلك : فإنه إذا كان العدد الفردي (٢ س+١) مربعاً كاملاً فإننا نحصل على قيمة س

نفرض أن :

(٢ س+١) = (٢ع + ١)^{٢}

٢ س+ ١ = ٤ع^{٢} + ٤ ع + ١

٢ س = ٤ع^{٢} + ٤ ع

س = ٢ع^{٢} + ٢ ع

س = ٢ع(ع +٢)

وعلى ذلك فإن : د(س) تعطى قيماً مربعة كاملة إذا وفقط إذا كانت : س = ٢ع(ع +٢)

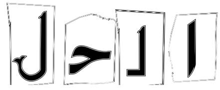
حيث ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ....}

A ب . **مثلث قائم الزاوية في** A **وإذا كانت** , ، ; **يقعان على الوتر** ب . **بحيث:**½ A½ , ½= ٣ سم

A½ ; ½ = ٤ **سم، وبحيث** :½, ب½ = ½ ; , ½=½ . ; ½

احسب محيط] A ب .

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ١٩٩٩)



A

٣ ٤

ب , ; .

نفرض أن :

- ب½ , ½= ½ ; , ½ = ½ ; . ½ = S
- A½ ب½= X
- A½ . ½= Y

D A ب . **مثلث قائم الزاوية في** A ، , A **ب حادة**

E ٣ ٢ = S ٢ + X ٢ – ٢ S X **جتا ب**

ولكن : جتا ب = $\frac{X}{٣ S}$

E ٣ ٢ = S ٢ + X ٢ – ٢ S X × $\frac{X}{٣ S}$

E ٩ = S ٢ + X ٢ – $\frac{٢ X ٢}{٣}$

E S ٢ + $\frac{X ٢}{٣}$ = ٩ ⟵ (١)

بالمثل :

٤ ٢ = S ٢ + Y ٢ – ٢ S Y **جتا** .

١٦ = S ٢ + Y ٢ – ٢ S Y × $\frac{Y}{٣ S}$

١٦ = S ٢ + Y ٢ – $\frac{٢ Y ٢}{٣}$

E S ٢ + $\frac{Y ٢}{٣}$ = ١٦ ⟵ (٢)

بجمع(١) ، (٢)

E ٢ S ٢ + $\frac{١}{٣}$ (X ٢ + Y ٢) =٢٥

ولكن : X ^٢^ + Y^٢^ = (٣ S)٢

E X ^٢^ + Y^٢^ =٩ S ^٢^

E ٢ S ^٢^ + ١/٣ (٩ S ^٢^) =٢٥

E ٥ S ^٢^ = ٢٥

E S = √٥

E ½ . ب½= ٣√ ٥

بالتعويض عن قيمة X في المعادلة (١)

E X = √١٢ = ٢√٣

E A½ ب½= ٢ √٣

بالتعويض عن قيمة X في المعادلة (٢)

Y^٢^ = ٣٣

E A½ . ½= √٣٣

E **محيط المثلث = (√٥ + ٢ √٣ + √٣٣) سم**

Aب . **مثلث فيه** A ب > A . ، , **منتصف** ب . ، **رسم** A هـ y ب . ، . ل y A ب

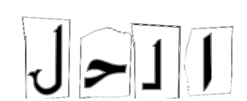
ب و y A . ل وV ب . = { ; } ، هـ S // ل و ، **ويقطع** A ب **في** S **ويقطع** A . **في** X

اثبت أن: – النقاط ; ، S ، X ، , **تقع على محيط دائرة واحدة**

(المصدر : اولمبياد الرياضيات النيوزيلندية – ١٩٩٨)

ملاحظة : سنستخدم ما يسمى بدائرة أويلر والتي تنص على:

"الدائرة المارة بنقاط تقاطع ارتفاعات المثلث الحاد الزوايا مع أضلاع هذا المثلث، تمر أيضا بمنتصفات أضلاع نفس المثلث" وقد ورد إثبات هذه القاعدة في باب " زاوية



Dب و y A . ، . ل y A ب

E الشكل و . ب ' رباعي دائري
(تمر بروؤسه دائرة واحدة)

E ; ب × ; . = ; و × ; ' ⟵ (١)

D الدائرة المارة بالنقاط و ، ' ، هـ
(نقاط التعامد على أضلاع] A ب .) تمر بمنتصفات أضلاع] A ب .) .

E ; و× ; ' = ; هـ × ; , ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

E ; ب × ; . = ; هـ × ; , ⟵ (٣)

D ∠ A و ' = ∠ A ب . (خارجة عن الرباعي الدائري)

D X هـ // و '

E ∠ A و ' = ∠ A X S بالتناظر

E ∠ A ب . = ∠ A X S

D ∠ ب هـ S = ∠ . هـ X بالتقابل بالرأس

E] ب هـ S f] X هـ .

E ب هـ / X هـ = S هـ / هـ . = ب S / X .

هـ X × هـ S = ب هـ × هـ .

والآن نفرض أن :-

ب هـ × هـ . = هـ ; × هـ , ⟵ (٤)

E هـ X × هـ S = هـ ; × هـ ,

ومنها : S ، X ، ; ، , **تقع على محيط دائرة واحدة**

E<u>**البرهان يُختزل إلى حالة الاقتضاء (٣) ⟸ (٤)**</u>

نفرض أن :-

- ½ , ب ½= ½ , . ½= Q
- هـ½ , ½= K
- ½ , ; ½= R

E ب هـ½ ½= Q + K ، ½ ; . ½= Q -R ، ½ ; هـ½= K - R ، ½ . هـ ½= K - Q

E **المعادلة (٣) تؤول إلى:** ; ب × ; . = هـ ; × ; ,

E (Q + R) × (Q -R) = (K - R) × R

E R٢ - Q٢ = R٢ - R K

E Q٢ = R K ⟵ (٥)

المعادلة (٤) تؤول إلى: ب هـ × هـ . = هـ ; × هـ ,

E (K + Q) × (K - Q) = (K - R) × R

E Q٢ - K٢ = R K - K٢

E Q٢ = R K ⟵(٦)

E **من (٥) ، (٦) حالة الاقتضاء متحققة ومنها:-**

النقاط ; ، S ، X ، , **تقع على محيط دائرة واحدة**

إذا كانت: A ، ب ، . **جذور كثيرة الحدود :** S ^{٣}- ٦ S ^{٢} + ٥ S - ١ = صفر

اوجد : A^{٥} + ب^{٥} + . ^{٥}

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ٢٠٠٣)

الحل

A D ، ب ، . جذور كثيرة الحدود: S ^{٣}- ٦ S ^{٢} + ٥ S - ١ = صفر

A E + ب + . = ٦ ، A ب + ب . + A . = ٥ ، A ب . = ١

(أنظر العلاقة بين جذور المعادلة التكعيبية في قسم : زاوية حرة)

A D ، ب ، . تحقق المعادلة : S ^{٣}- ٦ S ^{٢} + ٥ S - ١ = صفر

A E^{٣}- ٦A^{٢} + ٥A - ١ = صفر

، E ب^{٣} - ٦ ب^{٢} + ٥ب -١= صفر   (١)

، E . ^{٣}- ٦ . ^{٢} + ٥ . - ١ = صفر

من المجموعة (١)

A E^{٣} = ٦A^{٢} - ٥A + ١

، E ب^{٣} = ٦ ب^{٢}- ٥ب +١   (٢)

، E . ^{٣} = ٦ . ^{٢}- ٥ . + ١

بالجمع:

A E^{٣} + ب^{٣} + . ^{٣} = ٦(A^{٢}+ ب^{٢}+ . ^{٢}) – ٥(A+ ب + .) + ٣

=٦(A^{٢}+ ب^{٢}+ . ^{٢}) – ٥(٦) + ٣

=٦(A^{٢}+ ب^{٢}+ . ^{٢}) – ٢٧

E للحصول على قيمة : (A^{٣} + ب^{٣} + . ^{٣}) يجب أولاً أن نحصل على (A^{٢}+ ب^{٢}+ . ^{٢})

D(A+ ب + .)^{٢} = A^{٢}+ ب^{٢}+ . ^{٢} + ٢A ب +٢ ب . + ٢ A .

(٦)^{٢} = A^{٢}+ ب^{٢}+ . ^{٢} + ٢(A ب + ب . + A .)

٣٦ = A^{٢} + ب^{٢} + .^{٢} + ٢(٥)

E A^{٢} + ب^{٢} + .^{٢} = ٢٦

E A^{٣} + ب^{٣} + .^{٣} = ٦ × ٢٦ – ٢٧ = ١٢٩

والآن من مجموعة المعادلات (٢) :-

E A^{٤} = ٦A^{٣} - ٥A^{٢} + A

، E ب^{٤} = ٦ ب^{٣} - ٥ب^{٢} + ب   (٣)

، E .^{٤} = ٦ .^{٣} - ٥ .^{٢} + .

بالجمع:

A^{٤} + ب^{٤} + .^{٤} = ٦ (A^{٣} + ب^{٣} + .^{٣}) – ٥ (A^{٢} + ب^{٢} + .^{٢}) + (A + ب + .)

= ٦ × ١٢٩ – ٥× ٢٦ + ٦ × ١

= ٥٦٠

ومن مجموعة المعادلات (٣) والجمع :

A^{٥} + ب^{٥} + .^{٥} = ٦ (A^{٤} + ب^{٤} + .^{٤}) – ٥ (A^{٣} + ب^{٣} + .^{٣}) + (A^{٢} + ب^{٢} + .^{٢})

= ٦ × ٥٦٠ – ٥ × ١٢٩ + ٢٦

= ٣٢٨١

A ب . **مثلث تقع النقاط** S ، X ، Y **.على أضلاعه** A ب ، ب . ، . A **على الترتيب**

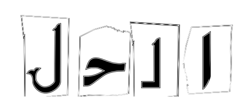
X Y . ∠ = S Y A∠ ، ب S X ∠ = A S Y ∠

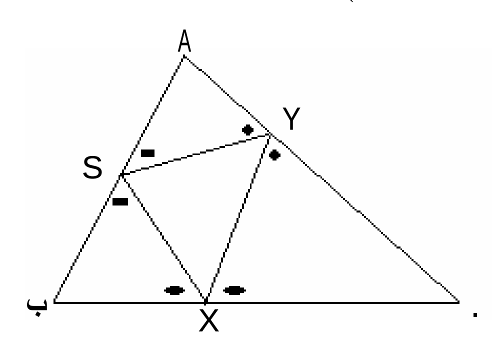
. X Y∠ = ب X S∠

اثبت أن:

Y A ب∠ = S X ب∠

(المصدر : مسابقة الرياضيات المفتوحة – كندا ٢٠٠٤)





نفرض أن:

Q = ب S X ∠ = A S Y ∠·

N = X Y . ∠ = S Y A ∠·

W = . X Y∠ = ب X S ∠·

(١) ⟵ N - Q - °١٨٠ = Y A S ∠ E

(٢) ⟵ W - Q - °١٨٠ = ب X S ∠ ،

(٣) ⟵ N - W - °١٨٠ = X . Y ∠ ،

بالجمع :

(N + W + Q)٢ - °١٨٠ × ٣ = X . Y∠ + ب X S ∠ + Y A S ∠ E

(N + W + Q)٢ - °٥٤٠ = °١٨٠

°٣٦٠ = (N + W + Q)٢ -E

(٤) ⟵ °١٨٠ = N + W + Q -E

(٥) ⟵ °١٨٠ = (A∠ + N + Q) : Y S Az **ولكن من**

W = A∠ : **(٥) ، (٤) من**

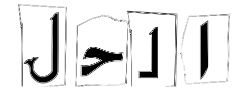
Y A ب∠ = S X ب∠ E

إذا كان : $\frac{S}{A} = \frac{X}{ب} = \frac{Y}{.}$ **حيث** S ، X ، Y ، A ، ب ، . **أعداد صحيحة موجبة**

اثبت أن :

$$\sqrt{S\ A} + \sqrt{X\ ب} + \sqrt{Y\ .} = \sqrt{(A + ب + .)(S + X + Y)}$$

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات – ٢٠٠٤)



نفرض أن : ' = $\frac{S}{A}$

ومنها :

$S = A'$

$X = ب'$

$Y = .\,'$

E الطرف الأيمن يصبح على الصورة :-

$$\sqrt{S\ A} + \sqrt{X\ ب} + \sqrt{Y\ .} = \sqrt{A^{2}'} + \sqrt{ب^{2}'} + \sqrt{.^{2}'}$$

$$= (A + ب + .)\sqrt{'} \longleftarrow (1)$$

ويكون الطرف الأيسر على الصورة :-

$$\sqrt{(A + ب + .)(S + X + Y)} = \sqrt{(A + ب + .)(A' + ب' + .\,')}$$

$$= \sqrt{'\ (A + ب + .)^{2}}$$

$$= (A + ب + .)\sqrt{'} \longleftarrow (2)$$

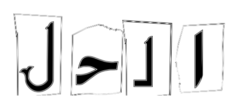
من (١) ، (٢) يتحقق المطلوب

٢٨

إذا كانت: $S = \frac{١}{\sqrt{٠} + \sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٤}} + \cdots\cdots + \frac{١}{\sqrt{٢٠٠٢} + \sqrt{٢٠٠٤}}$

فأوجد قيمة : S

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات – ٢٠٠٤)



من العلاقة المعطاة يمكن التعبير عن كل حد فيها بالصورة :-

$$\frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س+٢}}$$

(بالضرب في المرافق)

$$\frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س+٢}} \times \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt{س}}{\sqrt{س+٢} - \sqrt{س}} = \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt{س}}{٢} = \frac{١}{٢}\left(\sqrt{س+٢} - \sqrt{س}\right)$$

$$E\ S = \frac{١}{٢}\left[\left(\sqrt{٢} - \sqrt{٠}\right) + \left(\sqrt{٤} - \sqrt{٢}\right) + \left(\sqrt{٦} - \sqrt{٤}\right) \ldots\ldots + \left(\sqrt{٢٠٠٤} - \sqrt{٢٠٠٢}\right)\right]$$

$$E\ S = \frac{١}{٢}\left(\sqrt{٢٠٠٤} - \sqrt{٠}\right)$$

$$E\ S = \frac{١}{٢} \times ٢ \times \sqrt{٥٠١}$$

$$E\ S = \sqrt{٥٠١}$$

٢٩

حل المعادلة:

$$\text{لو}_{٤} \sqrt{S^{\frac{٤}{٣}}} + ٣\,\text{لو}_{S}(١٦\ S) = ٧$$

(المصدر : مسابقة الرياضيات للمدارس الثانوية– جنوب كارولينا الأمريكية ٢٠٠٥)

الحل

$$D\ \text{لو}_{٤} \sqrt{S^{\frac{٤}{٣}}} = \text{لو}_{٤} S^{\frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٢}} = \text{لو}_{٤} S^{\frac{٢}{٣}} = \frac{٢}{٣}\ \text{لو}_{٤} S$$

$$D\ ٣\ \text{لو}_{S}(١٦\ S) = ٣\,(\text{لو}_{S} ١٦ + \text{لو}_{S} S)$$

$$= ٣(\text{لو}_{S} ٤^{٢} + ١)$$

$$= ٣\,(٢\ \text{لو}_{S} ٤ + ١)$$

$$= ٦\ \text{لو}_{S} ٤ + ٣$$

E **المعادلة تصبح على الصورة :-**

$$\frac{٢}{٣}\ \text{لو}_{٤} S + ٦\,\text{لو}_{S} ٤ + ٣ = ٧$$ **بالضرب × ٣**

$$E\ \ ٢\ \text{لو}_{٤} S + ١٨\,\text{لو}_{S} ٤ = ١٢$$

$$D\ \text{لو}_{S} ٤ = \frac{١}{\text{لو}_{٤} S}$$

$$E\ \ ٢\ \text{لو}_{٤} S + ١٨ \times \frac{١}{\text{لو}_{٤} S} = ١٢$$ **بالضرب × لو٤ S**

$$E\ ٢\,(\text{لو}_{٤} S)^{٢} + ١٨ = ١٢\ \text{لو}_{٤} S$$ **بالقسمة على ٢**

$$E\ \ (\text{لو}_{٤} S)^{٢} - ٦\ \text{لو}_{٤} S + ٩ = \text{صفر}$$

$$E\ \ (\text{لو}_{٤} S - ٣)^{٢} = \text{صفر}$$

$$E\ \ \text{لو}_{٤} S = ٣$$

$$E\ \ S = ٤^{٣} = ٦٤$$

إذا كانت: $X \ b \ S$ ، $X^{٢} = S + ٢٠٠٢$ ، $S^{٢} = X + ٢٠٠٢$

أوجد قيمة $S \ X$

(المصدر : مسابقة الرياضيات للمدارس الثانوية– جنوب كارولينا الأمريكية ٢٠٠٢)

الحل

نفرض أن : $X^{٢} = S + ٢٠٠٢$ ⟵ **(١)**

$S^{٢} = X + ٢٠٠٢$ ⟵ **(٢)**

من (١) ، (٢) : $٢٠٠٢ = X^{٢} - S$ ، $٢٠٠٢ = S^{٢} - X$ ⟵ **(٣)**

من (٣) : $X^{٢} - S = S^{٢} - X$

$E \ (S^{٢} - X^{٢}) = -(S - X)$

$E \ (S - X)(S + X) = -(S - X)$

$E \ (S + X) = -١$ ⟵ **(٤)**

بجمع (١) ، (٢)

$S^{٢} + X^{٢} = ٤٠٠٤ + (S + X)$

$= ٤٠٠٤ + (-١) = ٤٠٠٣$ ⟵ **(٥)**

ولكن : $(S + X)^{٢} = (S^{٢} + X^{٢}) + ٢ \ S \ X$ ⟵ **(٦)**

من (٤) ، (٥) في (٦)

$E \ (-١)^{٢} = ٤٠٠٣ + ٢ \ S \ X$

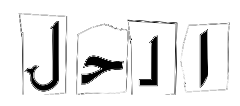
$E \ S \ X = -٢٠٠١$

A ب . **مثلث حاد الزوايا فيه:-**

½ب S ½ = $\frac{١}{٢}$ ½ S Y½ ، ½A X ½ = $\frac{١}{٢}$ ½X S ½ ، ½ . Y½ = $\frac{١}{٢}$ ½Y X ½

أوجد النسبة بين مساحتي z z A ب . ، S X Y

(المصدر : مسابقة الرياضيات للمدارس الثانوية– جنوب كارولينا الأمريكية ٢٠٠٣)





- نرسم : X و y Y S
- ونرسم : . هـ y ب Y

E z Y و X f z Y هـ .

E $\frac{.\ هـ}{و\ X} = \frac{.\ Y}{Y\ X}$

D½ . Y½ = $\frac{١}{٢}$ ½Y X ½

E $\frac{.\ هـ}{و\ X} = \frac{.\ Y}{Y\ X} = \frac{١}{٢}$

Dمساحة z Y ب . = $\frac{١}{٢}$ × ½ ب½Y× ½ . هـ ½

D½ ب½Y= $\frac{٣}{٢}$ ½Y S ½ ، ½ . هـ½= $\frac{١}{٢}$ ½و X ½

Eمساحة z Y ب . = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ ½Y S ½ × $\frac{١}{٢}$ ½و X ½

= $\frac{٣}{٤}$ ($\frac{١}{٢}$½Y S ½×½ و X ½)

= $\frac{٣}{٤}$ (مساحة z S Y X)

بالمثل : مساحة z A ب S = $\frac{٣}{٤}$ (مساحة z S X Y)

، بالمثل : مساحة z A X . = $\frac{٣}{٤}$ (مساحة z S X Y)

E مساحة z A ب . = (مساحة z S X Y)+ (مساحة z A ب S) + (مساحة z A X .)

+ (مساحة z Y ب .) .

E مساحة z A ب . = $\frac{٣}{٤}$ (مساحة z S X Y)+ $\frac{٣}{٤}$ (مساحة z S X Y)+$\frac{٣}{٤}$ (مساحة z S X Y)
+ (مساحة z S X Y).

E مساحة z A ب . = ($\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ + ١) مساحة z S X Y.

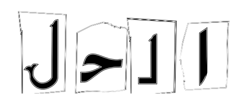
E مساحة z A ب . = $\frac{١٣}{٤}$ مساحة z S X Y.

٣٢

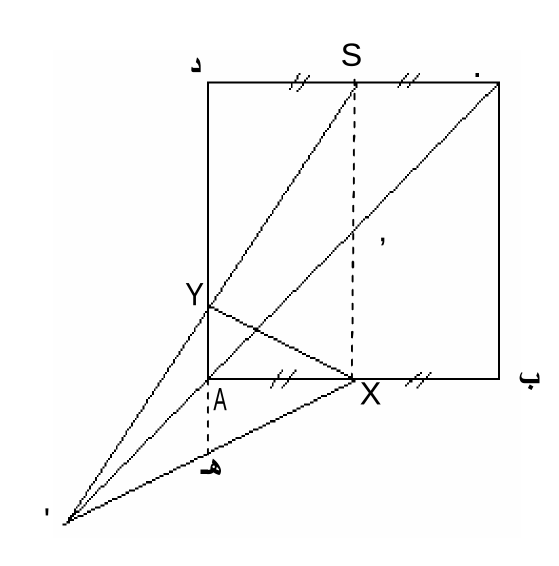
A ب . د مربع فيه S ، X منتصفات أضلاعه . د A ، A ب على الترتيب .

رسم S Y يقطع A د في Y ويقطع . A في ' .

اثبت أن : ∠Y X A = ∠' X A



(المصدر: مسابقة وكالة الرياضيات الأمريكية – ابريل ٢٠٠٥ طلاب)



- نصل S X فيقطع قطر المربع A . في مركز المربع ,
- نمد د A ليقطع ' X في هـ

D , مركز المربع A ب . د

E , منتصف S X

D S X //Y هـ

E [' Y هـ f z ' S X

E A' متوسط في [' Y هـ

E ½YA½ = ½هـA½

في [ ] X AY ، هـ A X

D ½YA½ = ½هـA½ ، A X ضلع مشترك ، A X y هـ Y

E [ ] X AY ، هـ A X يتطابقان ، وينتج أن

∠Y X A = ∠' X A

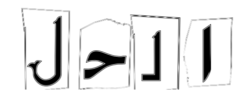
٣٣

إذا كانت: $S^{2} - 3S + 1 =$ صفر

أوجد قيمة: –

$$S^{9} + S^{7} + S^{-9} + S^{-7}$$

(المصدر : مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية – ٢٣ فبراير ٢٠٠٤)



بقسمة المعادلة: $S^{2} - 3S + 1 =$ صفر **على :** S

$$E\ S + \frac{1}{S} = 3 \quad \longrightarrow (1)$$

$$S^{9} + S^{7} + S^{-9} + S^{-7} = (S^{9} + S^{7}) + (S^{-9} + S^{-7})$$

$$= S^{8}\left(S + \frac{1}{S}\right) + S^{-8}\left(S + \frac{1}{S}\right)$$

$$= (S^{8} + S^{-8})\left(S + \frac{1}{S}\right)$$

من (١) : $S^{9} + S^{7} + S^{-9} + S^{-7} = 3\,(S^{8} + S^{-8})$

بتربيع المعادلة (١)

$$\left(S + \frac{1}{S}\right)^{2} = (3)^{2}$$

$$\left(S^{2} + \frac{1}{S^{2}} + 2\right) = 9$$

$E\ S^{2} + S^{-2} = 7$ **بالتربيع**

$$E\ (S^{2} + S^{-2})^{2} = 49$$

$E\ S^{4} + S^{-4} = 47$ **بالتربيع**

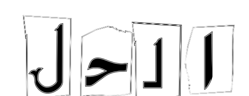
$E\ S^{8} + S^{-8} = (47)^{2} - 2 = 2257$ **بالتربيع**

$$E\ S^{9} + S^{7} + S^{-9} + S^{-7} = 3\,(S^{8} + S^{-8}) = 3 \times 2257 = 6621$$

n **أوجد :** $\frac{ء^{٢٩٥٩}}{ء S^{٢٩٥٩}}$ جا S

n **أوجد :** $\int_{-٤}^{٥} \frac{S^{٢}}{|S|}$ ء S

(المصدر : مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية – ٢٠٠١)



أولاً : $\frac{ء^{٢٩٥٩}}{ء S^{٢٩٥٩}}$ جا S

D **المشتقة الرابعة للدالة : جا S = جا S**

D ٢٩٥٩ = ٤× ٧٣٩ + ٣

E **الاشتقاق للدالة : جا S عدد ٢٩٥٩ مرة يكافئ ٣ مرات**

E $\frac{ء^{٢٩٥٩}}{ء S^{٢٩٥٩}}$ جا S = $\frac{ء^{٣}}{ء S^{٣}}$ جا S = - جتا S

ثانياً: $\int_{-٤}^{٥} \frac{S^{٢}}{|S|}$ ء S

- **إذا كانت S G صفر فإن | S | = - S**
- **إذا كانت S F صفر فإن | S | = S**

E $\int_{-٤}^{٥} \frac{S^{٢}}{|S|}$ ء S = $\int_{-٤}^{٠} \frac{S^{٢}}{-S}$ ء S + $\int_{٠}^{٥} \frac{S^{٢}}{S}$ ء S

= $\int_{-٤}^{٠} -S$ ء S + $\int_{٠}^{٥} S$ ء S

= $\left[-\frac{١}{٢} S^{٢}\right]_{-٤}^{٠} + \left[\frac{١}{٢} S^{٢}\right]_{٠}^{٥}$ = ٨ + $\frac{٢٥}{٢}$ = $\frac{٤١}{٢}$

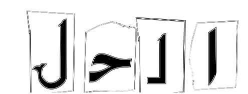
٣٥

إذا كانت:- $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2} = \text{٦}$

، $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ع}} + \frac{\text{ع}}{\text{ص}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ع}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{ع}}\right)^{2} = \text{١٦}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

أوجد قيمة :-

$$\frac{\text{١}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ع}^{2}}$$



(المصدر : مسابقة ولاية ألينوي الأمريكية العامة – نوفمبر)

$$\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ع}} + \frac{\text{ع}}{\text{ص}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ع}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{ع}}\right)^{2} = \left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{س}^{2}} + \text{٢}\right) + \left(\frac{\text{ص}^{2}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{ع}^{2}}{\text{ص}^{2}} + \text{٢}\right)$$

$$+ \left(\frac{\text{ع}^{2}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ع}^{2}} + \text{٢}\right)$$

$$\text{١٦}\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{س}^{2}} + \text{٢} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{ع}^{2}}{\text{ص}^{2}} + \text{٢} + \frac{\text{ع}^{2}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ع}^{2}} + \text{٢}$$

$$\text{١٦}\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{٣} + \left[\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ع}^{2}} + \text{١}\right) + \left(\frac{\text{ص}^{2}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{س}^{2}} + \text{١}\right) + \left(\frac{\text{ع}^{2}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{ع}^{2}}{\text{ص}^{2}} + \text{١}\right)\right]$$

$$\text{١٦}\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{٣} + \left[\text{س}^{2}\left(\frac{\text{١}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{2}}\right) + \text{ص}^{2}\left(\frac{\text{١}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ص}^{2}}\right) + \text{ع}^{2}\left(\frac{\text{١}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ع}^{2}}\right)\right]$$

$$\text{١٦}\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{٣} + \left(\frac{\text{١}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{2}}\right)\left(\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}\right)$$

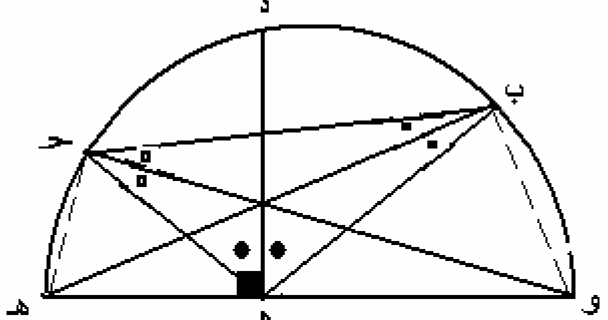
D $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2} = \text{٦}$

E $\frac{\text{١}}{\text{ص}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{ع}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{2}} = \frac{\text{١٦,٥} - \text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{٩}}{\text{٤}}$

نصف دائرة قطرها و هـ ، A د y و هـ ، A د **ينصف** ∠ بA ، هـ ب **ينصف** ∠ A ب .

و . **ينصف** ∠ A . ب ، **إذا كان** A½ ب½= ٦ **سم** ، ½ . ب½= ٧**سم** ، A½ . ½ =٣**سم**

فاوجد A½ د½ .



الحل

نفرض أن:-

- ∠ A . و = ∠ و . ب = Q
- ∠ Aب هـ = ∠ هـ ب . = W
- ∠ ب A د = ∠ دA . = N

E ٢Q+ ٢ W + ٢ N = ١٨٠ °

E Q+ W + N = ٩٠ ° ⟵ (١)

D د A y و هـ

E ∠ هـA . = ∠ ب Aو = ٩٠° - N ⟵ (٢)

D ∠ و ب هـ = ٩٠ ° (محيطية مرسومة على القطر)

E Aب و = ٩٠° - W

بالمثل E ∠A . هـ = ٩٠° - Q

من (١) ∠ A . هـ = (Q+ W + N) - Q = W + N ⟵ (٣)

D ∠Aو ب = ١٨٠ ° - (∠ Aب و + ∠ ب A و)

= ١٨٠ ° - (٩٠° - W + ٩٠° - N)

= ١٨٠ ° - (١٨٠° - (W + N))

E∠Aو ب = W + N ⟵ (٤)

E من (٣) ، (٤) : ∠A . هـ = ∠Aو ب ⟵ (٥)

E من (٢) ، (٥) : [A . هـ f] A و ب

E $\frac{\text{A هـ}}{\text{A ب}} = \frac{\text{A .}}{\text{A و}}$

E

E $\frac{\text{A هـ}}{\text{A .}} = \frac{\text{A ب}}{\text{A و}}$

E A هـ × A و = A . × A ب ⟵ (٦)

D ∠ و د هـ = ٩٠ °

E $(\text{A د})^{٢}$ = A هـ × A و

E من (٦) : $(\text{A د})^{٢}$ = A . × A ب

= ٣ × ٦ = ١٨

E ½A د½ = ٣ $\sqrt{٢}$ سم

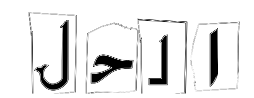
٣٧

تتقاطع الزاويتين ب A . ، و هـ ك **في النقاط** س، ص ، ع ، ل . A م **ينصف** ب A .

ويقطع هـ و **في** ن ، هـ م **ينصف** و هـ ك، A م y هـ م

أثبت أن: – النقاط س، ص ، ع ، ل **تقع على محيط دائرة واحدة .**

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية- فبراير ٢٠٠٥)

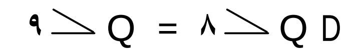


(نعطى الزوايا أرقاماً كما موضح بالشكل
وسنرمز لكلمة قياس بالرمز Q)

Q D ٧ = Q (١ + ٨)
(خارجة عن [A ن ص)

Q E ٧ = Q (٢ + ٨) ⟵ **(١)**

Q D ٨ = Q ٩ **(بالتقابل بالرأس)**



A D م y هـ م

Q E (٣ + ٩) = ٩٠ °

Q E ٨ = Q ٩ = ٩٠ ° - Q ٣ ⟵ **(٢)**

من (١) ، (٢): Q ٧ = Q ٢ + ٩٠ ° - Q ٣

بالمثل يمكن إثبات أن : Q ١٠ = Q ٣ + ٩٠ ° - Q ٢

Q E ٧ + Q ١٠ = Q ٢ + ٩٠ ° - Q ٣ + Q ٣ + ٩٠ ° - Q ٢

= ١٨٠° **(وهما متقابلتان في الشكل الرباعي س ص ع ل)**

E **الشكل س ص ع ل رباعياً دائرياً**

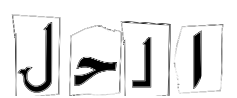
E **رؤوسه النقاط س، ص ، ع ، ل تقع على محيط دائرة واحدة.**

A ب . **مثلث حاد الزوايا فيه:-** ½A س½= ½س و½= ½و ب ½، ½A ص½= ½ص ع½= ½ع . ½،

½ب ن½= ½ن هـ½= ½هـ . ½.

أثبت أن :-

أضلاع] ط ل ك **توازي أضلاع**] A ب . **على الترتيب**



نصل : و ع

D $\frac{A\ ع}{A\ .} = \frac{A\ و}{A\ ب} = \frac{٢}{٣}$

E] A و ع f] A ب .

E ∠A ع و = ∠A . ب ، $\frac{و\ ع}{.\ ب} = \frac{٢}{٣}$

D و ع // ب .

E] و ك ع f] . ك ب

E $\frac{و\ ك}{ك\ .} = \frac{و\ ع}{ب\ .} = \frac{٢}{٣}$

E ½ك و½= $\frac{٢}{٣}$ ½ك . ½

ولكن : ½و . ½= ½ك و½+ ½ك . ½

E ½و . ½= ½ك . ½+ $\frac{٢}{٣}$ ½ك . ½= $\frac{٥}{٣}$ ½ك . ½

E $\frac{.\ ك}{.\ و} = \frac{٣}{٥}$ ⟵ (١)

بالمثل يمكن إثبات أن : $\frac{.\ ل}{.\ س} = \frac{٣}{٥}$ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) E] . ل ك f] . س و

E ∠ . ل ك = ∠ . س و **(وهما في وضع تناظر)**

E **ل ك // A ب**

وبالمثل يمكن إثبات أن :

ط ل // ب . ، **ط ك // A** .

E **أضلاع] ط ل ك توازي أضلاع] A ب** .

٣٩

إذا كانت: د(س) = ٢د(س) + د(١- س) = س^{٢} **أوجد** د(س)

(المصدر : مسابقة مدارس ولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية- ٦ديسمبر ١٩٩٧م)



D د(س) = ٢د(س) + د(١- س) = س^{٢} ⟵ (١)

E د(١ - س) = ٢د(١ - س) + د(١- ١ + س) = (١- س)^{٢}

E د(١ - س) = ٢د(١ - س) + د(س) = ١- ٢س + س^{٢} ⟵ (٢)

بضرب المعادلة (١) في ٢ وطرح المعادلة (٢) منها

٢ د(س) = ٤ د(س) + ٢ د(١- س) = ٢س^{٢}

٢د(س) - د(١ - س) = ٤ د(س) + ٢ د(١- س) - ٢ د(١ - س) - د(س) = ٢س^{٢} – (١- ٢س + س^{٢})

٢د(س) - د(١ - س) = ٤ د(س) - د(س) = ٢س^{٢} – (١- ٢س + س^{٢})

٢د(س) - د(١ - س) = ٣ د(س) = ٢س^{٢} – (١- ٢س + س^{٢})

٣ د(س) = ٢س^{٢} – (١- ٢س + س^{٢})

٣ د(س) = ٢س^{٢} –١+ ٢س - س^{٢}

٣ د(س) = س^{٢} + ٢س – ١

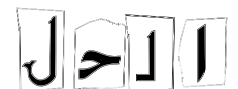
د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} – ١}{٣}$

٤٠

إذا كانت : د(س) = A س+ ب ، د (د (د(س))) = ٨ س + ٢١

أوجد قيمة A + ب

(المصدر : مسابقة مدارس ولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية- ٧فبراير ٢٠٠٤م)



D د(س) = A س+ ب

E د (د(س)) = A (A س+ ب) + ب

= A^{٢}س+ A ب + ب = A^{٢}س+ ب (A + ١)

، د((د(س))) = A [A^{٢}س+ ب (A + ١)] + ب

= A^{٣}س+ A^{٢} ب+ A ب + ب = A^{٣}س+ ب (A^{٢} + A + ١)

D د (د (د(س))) = ٨ س + ٢١

E A^{٣}س+ ب (A^{٢} + A + ١) = ٨ س + ٢١ **(بمقارنة المعاملات)**

E A^{٣} = ٨ **ومنها :** A = ٢

، ب (A^{٢} + A + ١) = ٢١

E ب (٤ + ٢ + ١) = ٢١

ومنها: ب = ٣

E A + ب = ٢ +٣ =٥

A ب .] **حاد الزوايا** , **فيه نقطة تقاطع ارتفاعاته** A س ، ب ص ، . ع ،A½ , ½= ب . ½

اثبت أن: س ص y س ع

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية- ٢٠٠١م)

الحل

في] A س . القائم في س

D . A س + A . س = ٩٠ ° ←(١)

وفي] ب ص . القائم في ص

D ص ب . + ص . ب= ٩٠ ° ←(٢)

من (١) ، (٢) E . A س = ص ب .



]] A ص , ، ب ص .

فيهما A½ , ½= ½ب . ½
A ص , = ب ص . = ٩٠ °
. A س = ص ب .

E **يتطابق]] وينتج أن :** A½ ص ½= ½ب ص ½

E] A **ص ب القائم في ص متطابق الضلعين**

E ص A ب = A ب ص = ٤٥°

في الشكل: , س ب ع

D , ع ب + , س ب = ١٨٠ °

E **الشكل:** , **س ب ع رباعيا دائرياً**

E , ب ع = , س ع= ٤٥° **(مرسومتان على قاعدة واحدة في الرباعي الدائري)**

بالمثل يمكن إثبات أن: , **س ص الواقعة في الرباعي الدائري :** , س . ص = ٤٥°

E ص س ع = ٤٥° + ٤٥° = ٩٠ °

E س ص y س ع

٤٢ **أوجد ناتج :** $\sqrt[٣]{\sqrt{٥}+٢} - \sqrt[٣]{\sqrt{٥}-٢}$

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية- ديسمبر ٢٠٠١)

الحل

نفرض أن : $A = \sqrt[٣]{\sqrt{٥}+٢}$ ، $ب = \sqrt[٣]{\sqrt{٥}-٢}$

E **المطلوب إيجاد :** $S = A - ب$

E $S^{٣} = (A - ب)^{٣}$

$= A^{٣} - ب^{٣} - ٣A^{٢}ب + ٣Aب^{٢}$

$= A^{٣} - ب^{٣} - ٣Aب(A - ب)$

$= A^{٣} - ب^{٣} - ٣Aب\,S$

ولكن : $A^{٣} - ب^{٣} = \left(\sqrt[٣]{\sqrt{٥}+٢}\right)^{٣} - \left(\sqrt[٣]{\sqrt{٥}-٢}\right)^{٣} = ٤$

وكذلك : $Aب = \left(\sqrt[٣]{\sqrt{٥}+٢}\right)\left(\sqrt[٣]{\sqrt{٥}-٢}\right) = ٥ - ٤ = ١$

E $S^{٣} = ٤ - ٣ \times ١ \times S$

E $S^{٣} + ٣S - ٤ =$ **صفر**

$(S^{٣} - ١) + (٣S - ٣) =$ **صفر**

$(S - ١)(S^{٢} + S + ١) + ٣(S - ١) =$ **صفر**

$(S - ١)(S^{٢} + S + ١ + ٣) =$ **صفر**

$(S - ١)(S^{٢} + S + ٤) =$ **صفر**

إما : $(S^{٢} + S + ٤) =$ **صفر (ليس لها حلول حقيقية)**

أو : $(S - ١) = ٠$ **ومنها :** $S = ١$

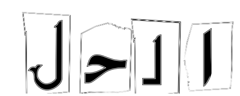
E $A - ب = ١$

E $\sqrt[٣]{\sqrt{٥}+٢} - \sqrt[٣]{\sqrt{٥}-٢} = ١$

إذا كانت س، ص ، ع **أعداداً موجبة. اثبت أن:**

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ص}}+\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}}+\frac{\text{ع}^2}{\text{س}} \geq \text{س}+\text{ص}+\text{ع}$$

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية- التصفية الثالثة- ديسمبر ٢٠٠١)



$$\therefore \frac{\text{س}^2}{\text{ص}}+\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}}+\frac{\text{ع}^2}{\text{س}} = \frac{\text{س}^2}{\text{ص}}+\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}}+\frac{\text{ع}^2}{\text{س}} + \text{س}+\text{ص}+\text{ع} - \text{س}-\text{ص}-\text{ع}$$

$$= \left(\frac{\text{س}^2}{\text{ص}} - \text{س}+\text{ص}\right) + \left(\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}} - \text{ص}+\text{ع}\right) + \left(\frac{\text{ع}^2}{\text{س}} - \text{ع}+\text{س}\right)$$

$$= \frac{\text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}^2 - \text{ع ص} + \text{ع}^2}{\text{ع}} + \frac{\text{ع}^2 - \text{س ع} + \text{س}^2}{\text{س}}$$

$$\because \text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2 = (\text{س} - \text{ص})^2 + \text{س ص} \geq \text{س ص}$$

$$\therefore \text{ص}^2 - \text{ع ص} + \text{ع}^2 \geq \text{ص ع}$$

$$، \text{ع}^2 - \text{س ع} + \text{س}^2 \geq \text{س ع}$$

$\because$ س، ص ، ع أعداداً موجبة

$$\therefore \frac{\text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}^2 - \text{ع ص} + \text{ع}^2}{\text{ع}} + \frac{\text{ع}^2 - \text{س ع} + \text{س}^2}{\text{س}} \geq \frac{\text{س ص}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص ع}}{\text{ع}} + \frac{\text{س ع}}{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}^2 - \text{س ص} + \text{ص}^2}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}^2 - \text{ع ص} + \text{ع}^2}{\text{ع}} + \frac{\text{ع}^2 - \text{س ع} + \text{س}^2}{\text{س}} \geq \text{س}+\text{ص}+\text{ع}$$

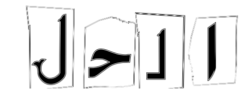
$$\therefore \frac{\text{س}^2}{\text{ص}}+\frac{\text{ص}^2}{\text{ع}}+\frac{\text{ع}^2}{\text{س}} \geq \text{س}+\text{ص}+\text{ع}$$

٤٤

إذا كان : A **عدد حقيقي** b **صفر** ، جا S + جا X =A ، جتا S + جتا X =A٢

احسب جتا (S - X) **بدلالة** A

(المصدر : مسابقة مدارس ولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية- ٧فبراير ٢٠٠٤م)



٥ A^٢ = A^٢ + (A٢)^٢

E ٥A^٢ = (جا S + جا X)^٢ + (جتا S + جتا X)^٢

= جا^٢ S + جا^٢ X + ٢ جا S جا X + جتا^٢ S + جتا^٢ X +٢ جتا S جتا X

= (جا^٢ S + جتا^٢ S) + (جا^٢ X + جتا^٢ X) + ٢(جا S جا X + جتا S جتا X)

= ١ + ١ + ٢(جا S جا X + جتا S جتا X)

= ٢ + ٢جتا (S - X)

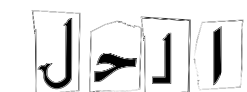
E جتا (S - X) = (٥ A^٢ - ٢) / ٢

إذا كانت : S ، X أعداداً حقيقة b صفر وكانت S ، X تحقق المعادلة:

$$\text{س} + \frac{٦}{\text{س}} = ٢\,\text{ص} + \frac{٣}{\text{ص}}$$

فأوجد S X إذا علمت أن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} \neq ٢$

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية - اكتوبر ٢٠٠٢)



$$\text{س} + \frac{٦}{\text{س}} = ٢\,\text{ص} + \frac{٣}{\text{ص}}$$

$$\text{س} + \frac{٦}{\text{س}} - ٢\,\text{ص} - \frac{٣}{\text{ص}} = \text{صفر}$$

$$(\text{س} - ٢\,\text{ص}) - \left(\frac{٣}{\text{ص}} - \frac{٦}{\text{س}}\right) = \text{صفر}$$

$$(\text{س} - ٢\,\text{ص}) - ٣ \left(\frac{٣\text{س} - ٦\,\text{ص}}{\text{س ص}}\right) = \text{صفر}$$

$$(\text{س} - ٢\,\text{ص}) - \frac{٣}{\text{س ص}}(\text{س} - ٢\,\text{ص}) = \text{صفر}$$

$$(\text{س} - ٢\,\text{ص})\left(١ - \frac{٣}{\text{س ص}}\right) = \text{صفر}$$

إما : س – ٢ ص = صفر

س = ٢ ص ، و منها $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = ٢$ **مرفوض من الشرط**

أو : ١ - $\frac{٣}{\text{س ص}}$ **= صفر ومنها س ص= ٣**

حل المعادلة :

جا^{٣} هـ + جا^{٢} هـ جتا هـ + جا هـ جتا^{٢}هـ + جتا^{٣} هـ = $\sqrt{\frac{٦}{٢}}$

حيث $\frac{ط}{٤} \le$ **هـ** $\le \frac{-ط}{٤}$

(المصدر : المسابقة الفردية لولاية نيويورك الأمريكية-٢٠٠٥)

الحل

D جا^{٣} هـ + جا^{٢} هـ جتا هـ + جا هـ جتا^{٢}هـ + جتا^{٣} هـ = $\sqrt{\frac{٦}{٢}}$

E (جا هـ + جتا هـ) (جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ) = $\sqrt{\frac{٦}{٢}}$

E (جا هـ + جتا هـ) (١) = $\sqrt{\frac{٦}{٢}}$

E جا هـ + جتا هـ = $\sqrt{\frac{٦}{٢}}$

جا هـ $\sqrt{\frac{٢}{٢}}$ + جتا هـ $\sqrt{\frac{٢}{٢}}$ = $\sqrt{\frac{٦}{٢}} \times \sqrt{\frac{٢}{٢}}$

جا هـ جتا $\frac{ط}{٤}$ + جتا هـ جا $\frac{ط}{٤}$ = $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$

جا (هـ + $\frac{ط}{٤}$) = $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$

(هـ + $\frac{ط}{٤}$) = ; ط $\pm \frac{ط}{٣}$

هـ = ; ط $\pm$ ($\frac{ط}{٣}$ - $\frac{ط}{٤}$)

هـ = ; ط $\pm \frac{ط}{١٢}$

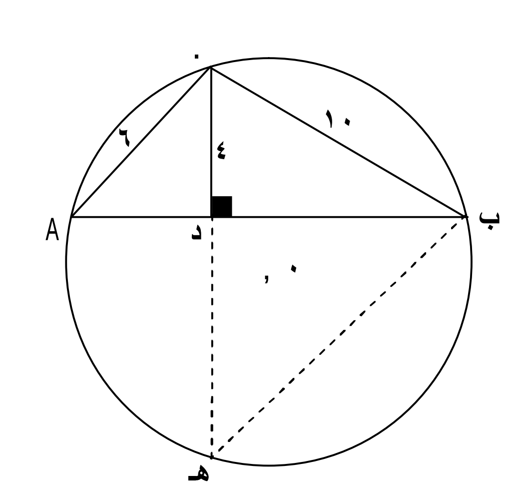
هـ = $\frac{ط}{١٢}$

إذا كان : A ب وتر في الدائرة , ، ½ب . ½= ١٠ سم ، . د A y ب ، ½ . د½ = ٤ سم

A ½ . ½= ٦سم ، فاحسب محيط الدائرة ,

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية-التصفية الثانية- ٢٠٠٠)

الحل



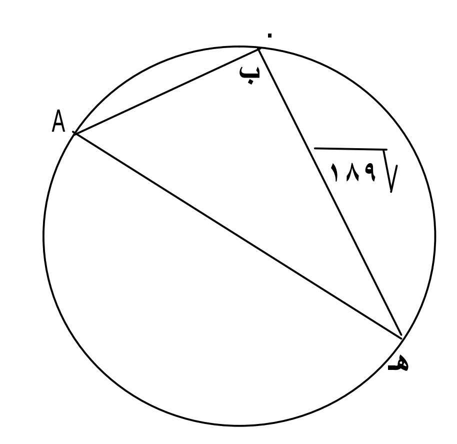
نرسم : . د يقطع الدائر في هـ ، ونصل : ب هـ

في] ب . د القائم في ∠ د

حسب نظرية فيثاغورث : ½ب د ½= √٨٤ سم

وبالمثل في] A د . القائم في ∠ د

حسب نظرية فيثاغورث : ½ دA ½= √٢٠ سم



A D ب ، . هـ وتران في الدائرة ,

A E د × د ب = . د × د هـ

E √٨٤ × √٢٠ = ٤ × د هـ

E ½ د هـ ½= √١٠٥ سم

في] ب د هـ القائم في ∠ د

حسب نظرية فيثاغورث : ½ب هـ½= √١٨٩ سم

D ∠ ب د هـ = ٩٠°

E∠ د ب هـ + ∠ ب هـ د = ٩٠°

E A هـ الأصغر + ب . الأصغر = ١٨٠°

A E . الأصغر + ب هـ الأصغر = ١٨٠°

A E هـ يعتبر قطراً في الدائرة ,

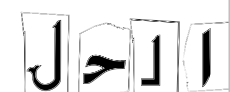
E ½ A هـ ½^{٢}= ١٨٩ + ٣٦ = ٢٢٥ ، ومنها :½ A هـ ½= ١٥ سم

E محيط الدائرة = ٢ × { × $\frac{١٥}{٢}$ = ١٥ }

إذا كانت: س ، ص ، ع **أعداد موجبة مختلفة ،** $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

فأوجد قيمة : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ **العددية**

(المصدر : مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية – ٢٠٠١)



D $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}}$

E ص ع = (س – ع) (س + ص)

E ص ع = س^{٢} + س ص – ع س – ع ص

E ٢ ص ع = س^{٢} + س ص – ع س

E ٢ ص ع + ع س = س^{٢} + س ص ⟵ (١)

D $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

E ص^{٢} = س^{٢} - س ع ⟵ (٢)

D $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

E س ع = س ص + ص^{٢} ⟵ (٣)

بالتعويض من (٢) في (٣)

E س ع = س ص + س^{٢} - س ع

E ٢س ع = س ص + س^{٢} ⟵ (٤)

بالتعويض من (١) في (٤)

E ٢س ع = ٢ ص ع + ع س

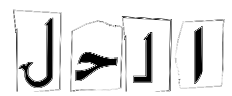
E س ع = ٢ ص ع

E $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}$

أوجد قيمة س الموجبة التي تحقق المعادلة: -

$$٤^{س} = ٢^{س} + ٦$$

(المصدر: مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية –٢٠٠٣)



نفرض أن : ص = $٢^{س}$

E $٤^{س} = ٢^{س} + ٦$ تتحول إلى الصورة : $ص^{٢} = ص + ٦$

E $ص^{٢} - ص - ٦ =$ صفر

E(ص +٢) (ص –٣) = صفر

إما : ص = - ٢ ومنها : $٢^{س} = -٢$ (مرفوض حيث س عدد موجب)

أو : ص = ٣ ومنها : س = $لو_{٢} ٣$

٥٠

اكتب : $\sqrt[٣]{٢ + ٥\sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}}}$

على الصورة : $\text{أ} + \text{ب}\sqrt{٢}$

(المصدر : مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية –٢٠٠٣)

الحل

نفرض أن : $\sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}} = \text{س} + \text{ص}\sqrt{٢}$ **(بالتربيع)**

$\therefore ٣ + ٢\sqrt{٢} = (\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}^{٢}) + (٢\,\text{س}\,\text{ص})\sqrt{٢}$

من الواضح أن : $\text{س} = \text{ص} = ١$

$\therefore \sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}} = ١ + \sqrt{٢}$

$\therefore \sqrt[٣]{٢ + ٥\sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}}} = \sqrt[٣]{٢ + ٥(١ + \sqrt{٢})} = \sqrt[٣]{٧ + ٥\sqrt{٢}}$

نفرض أن : $\sqrt[٣]{٧ + ٥\sqrt{٢}} = \text{أ} + \text{ب}\sqrt{٢}$ **(بالتكعيب)**

$\therefore ٧ + ٥\sqrt{٢} = (\text{أ} + \text{ب}\sqrt{٢})^{٣}$

$= (\text{أ} + \text{ب}\sqrt{٢})^{٢}(\text{أ} + \text{ب}\sqrt{٢})$

$= (\text{أ}^{٢} + ٢\text{ب}^{٢} + ٢\text{أ}\text{ب}\sqrt{٢})(\text{أ} + \text{ب}\sqrt{٢})$

$= \text{أ}^{٣} + \text{أ}^{٢}\text{ب}\sqrt{٢} + ٢\text{أ}\text{ب}^{٢} + ٢\text{ب}^{٣}\sqrt{٢} + ٢\text{أ}^{٢}\text{ب}\sqrt{٢} + ٤\text{أ}\text{ب}^{٢}$

$٧ + ٥\sqrt{٢} = (\text{أ}^{٣} + ٦\text{أ}\text{ب}^{٢}) + (٣\text{أ}^{٢}\text{ب} + ٢\text{ب}^{٣})\sqrt{٢}$

يتضح من العلاقة السابقة أن : $\text{أ} = \text{ب} = ١$

$\therefore \sqrt[٣]{٧ + ٥\sqrt{٢}} = ١ + \sqrt{٢}$

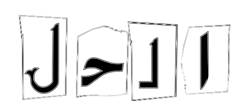
٥١

إذا كانت :

$٣^{س} = ٤$ ، $٤^{ص} = ٥$ ، $٥^{ع} = ٦$ ، $٦^{ل} = ٧$ ، $٧^{م} = ٨$ ، $٨^{ن} = ٩$

فاوجد قيمة:- س ص ع ل م ن

(المصدر : مسابقة مدارس ولاية كارولينا الجنوبية ٢٠٠٢م)



D $٣^{س ص ع ل م ن} = (٣^{س})^{ص ع ل م ن} = (٤)^{ص ع ل م ن} = (٤^{ص})^{ع ل م ن} = (٥)^{ع ل م ن}$

$= (٥^{ع})^{ل م ن} = (٦)^{ل م ن} = (٦^{ل})^{م ن} = (٧)^{م ن} = (٧^{م})^{ن} = (٨)^{ن} = ٩$

E $٣^{س ص ع ل م ن} = ٩$

E $٣^{س ص ع ل م ن} = ٣^{٢}$

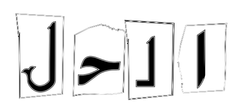
E س ص ع ل م ن = ٢

إذا كانت : S ، X ، Y أعداد حقيقية موجبة .

اثبت أن :-

$$(Y+X+S)٣ \; F \; \left(\frac{١}{Y}+\frac{١}{X}+\frac{١}{S}\right)(Y^{٢}+X^{٢}+S^{٢})$$

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية-٢٠٠٣)



D S ، X **أعداداً موجبة**

$E\;(S-X)^{٢} = S^{٢} + X^{٢} - ٢\; S\; X \; F$ **صفر**

$E\; S^{٢} + X^{٢} - S\; X \; F \; S\; X$ ⟵ **(١)**

D **بضرب المعادلة (١) في : (S + X) حيث S ، X أعداد موجبة**

$E\;(S+X)(S^{٢}+X^{٢}-S\;X) \; F \; S\;X\;(S+X)$

$E\;(S^{٣}+X^{٣}) \; F \; S\;X\;(S+X)$

بقسمة المعادلة السابقة على : S X (حيث S ، X أعداد موجبة)

$$E\;\frac{S^{٢}}{X}+\frac{X^{٢}}{S} \; F \; S+X$$ ⟵ **(٢)**

بالمثل يمكن إثبات أن:

$$\frac{S^{٢}}{Y}+\frac{Y^{٢}}{S} \; F \; S+Y$$ ⟵ **(٣)**

$$\frac{X^{٢}}{Y}+\frac{Y^{٢}}{X} \; F \; X+Y$$ ⟵ **(٤)**

بجمع : (٢) ،(٣) ،(٤)

$$\frac{S^{٢}}{X}+\frac{X^{٢}}{S}+\frac{S^{٢}}{Y}+\frac{Y^{٢}}{S}+\frac{X^{٢}}{Y}+\frac{Y^{٢}}{X} \; F \; ٢(S+X+Y)$$

بإضافة : S + X +Y لطرفي المتباينة السابقة

$$(Y+X+S)٣\ F\quad \frac{Y^{٢}}{X} + \frac{X^{٢}}{Y} + \frac{Y^{٢}}{S} + \frac{S^{٢}}{Y} + \frac{X^{٢}}{S} + \frac{S^{٢}}{X} + Y + X + S\ \ E$$

من الممكن صياغة المتباينة السابقة كما يلي:-

$$(Y+X+S)٣F\ \left(\frac{Y^{٢}}{X} + \frac{Y^{٢}}{S} + Y\right) + \left(\frac{X^{٢}}{Y} + \frac{X^{٢}}{S} + X\right) + \left(\frac{S^{٢}}{Y} + \frac{S^{٢}}{X} + S\right)$$

$$\left(\frac{١}{Y} + \frac{١}{X} + \frac{١}{S}\right) Y^{٢} + \left(\frac{١}{Y} + \frac{١}{X} + \frac{١}{S}\right) X^{٢} + \left(\frac{١}{Y} + \frac{١}{X} + \frac{١}{S}\right) S^{٢}\ \ E$$

$$(Y+X+S)٣F$$

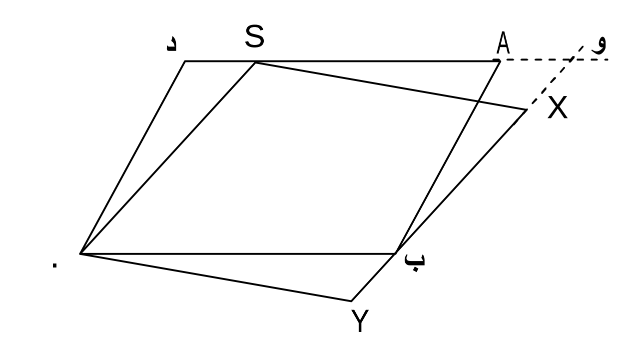
$$(Y+X+S)٣\ F\ \left(\frac{١}{Y} + \frac{١}{X} + \frac{١}{S}\right)\left(Y^{٢} + X^{٢} + S^{٢}\right)\ E$$

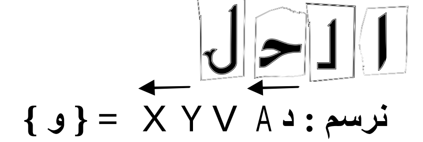
إذا كان: A ب . د ، S X Y . **متوازيا أضلاع مرسومان كما بالشكل**

اثبت أن :-

مساحة متوازي الأضلاع A ب . د = **مساحة متوازي الأضلاع** S X Y .

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية-٢٠٠٥)





نرسم : د A V Y X = { و }

D ب و // . S ، و S // ب .

E الشكل : و ب . S متوازي أضلاع

D مساحة متوازي الأضلاع : و ب . S = مساحة متوازي الأضلاع : A ب . د ←(١)
(لهما نفس القاعدة : ب . ويقعان بين مستقيمين متوازيين : ب . ، و د)

D مساحة متوازي الأضلاع : و ب . S = مساحة متوازي الأضلاع : S X Y . ←(٢)
(لهما نفس القاعدة : S . ويقعان بين مستقيمين متوازيين : . S ، و Y)

من (١) ، (٢)

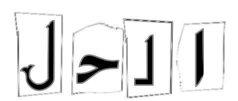
E مساحة متوازي الأضلاع A ب . د = مساحة متوازي الأضلاع S X Y .

٥٤

اوجد ناتج:

$$\frac{٢^{٢}-١}{٢^{٢}+٢}\times\frac{٣^{٢}-١}{٣^{٢}+٣}\times\frac{٤^{٢}-١}{٤^{٢}+٤}\times\cdots\cdots\times\frac{١٩^{٢}-١}{١٩^{٢}+١٩}\times\frac{٢٠^{٢}-١}{٢٠^{٢}+٢٠}$$

(المصدر : المسابقة الفردية لولاية نيويورك الأمريكية-٢٠٠٥- التصفية الثالثة)



D **كل كسر في الصورة السابقة يمكن كتابته على الصورة:-**

$$\frac{S^{٢}-١}{S^{٢}+S}=\frac{(S-١)(S+١)}{S(S+١)}=\frac{S-١}{S}$$

E **يمكن صياغة المطلوب على الصورة:**

$$\frac{٢-١}{٢}\times\frac{٣-١}{٣}\times\frac{٤-١}{٤}\times\cdots\cdots\times\frac{١٩-١}{١٩}\times\frac{٢٠-١}{٢٠}$$

$$=\frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٣}\times\frac{٣}{٤}\times\cdots\cdots\times\frac{١٨}{١٩}\times\frac{١٩}{٢٠}$$

$$=\frac{١}{٢٠}$$

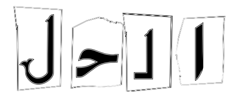
٥٥

إذا كانت:

د(س) = A س٢ + ب س + .   ،   د(س + ١) = س٢ + ٧ س + ٤

اوجد قيمة : A ، ب ، .

(المصدر : دوري الرياضيات لمدارس ولاية نيويورك الأمريكية- ٢٠٠١-٢٠٠٢م)



D د(س) = A س٢ + ب س + .

E د(س + ١) = A(س +١)٢ + ب (س + ١) + .

د (س + ١) = A(س٢ + ٢ س + ١) + ب (س + ١) + .

د (س + ١) = A س٢ + ٢Aس + A + ب س + ب + .

د (س + ١) = A س٢ + (٢A + ب) س+(A + ب + .)

ولكن : د(س + ١) = س٢ + ٧ س + ٤

بمساواة المعاملات

E A = ١

، ٢A + ب = ٧   ومنها: ٢ ×١+ ب = ٧

E ب = ٥

، A + ب + . = ٤ ومنها: ١ + ٥ + . = ٤

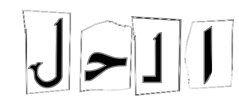
E . = -٢

٥٦

إذا كان: $لو_{ص}س + لو_{س}ص = ٧$

أوجد قيمة: $(لو_{ص}س)^{٢} + (لو_{س}ص)^{٢}$

(المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية- يناير ٢٠٠٥)



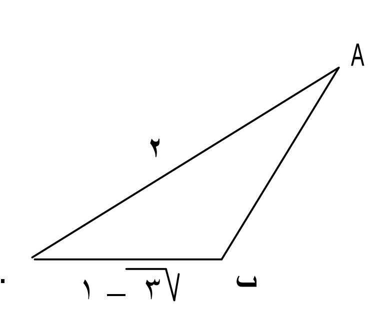
D $لو_{ص}س + لو_{س}ص = ٧$ (بالتربيع)

E $(لو_{ص}س)^{٢} + ٢\ (لو_{ص}س)\ (لو_{س}ص) + (لو_{س}ص)^{٢} = ٤٩$

D $لو_{ص}س \times لو_{س}ص = ١$

E $(لو_{ص}س)^{٢} + ٢ \times ١ + (لو_{س}ص)^{٢} = ٤٩$

E $(لو_{ص}س)^{٢} + (لو_{س}ص)^{٢} = ٤٧$

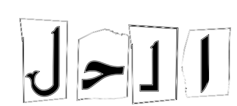


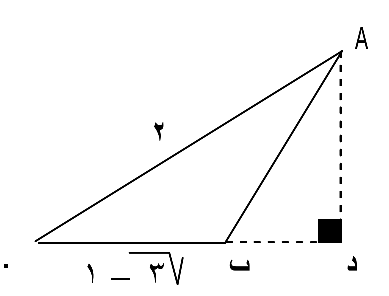
على الشكل :A ب . **مساحته** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **سم**٢

، ½ب . ½= (٣√ – ١) **سم** ، ½ A . ½ = ٢ **سم**

أوجد قياس زاوية : ب A .

(المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية- يناير ٢٠٠٥)





نرسم : A **د ارتفاعا للمثلث** A ب .

E **مساحة**] A ب . = $\frac{1}{2}$ × ½ب . ½× ½ A د½

E $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ × (٣√ – ١) × ½ A د½

E ½ A د½ = ١ **سم** ⟵ **(١)**

من نظرية فيثاغورث: ½د . ½= ٣√

E ½ **ب د** ½ = ٣√ - (٣√ – ١) = ١ **سم** ⟵ **(٢)**

من (١) ، (٢) E] A **ب د متطابق الضلعين**

E **قياس** ∠ **د**A **ب = ٤٥°**

في] A **د . القائم في** ∠ **د**

D ½ A د½ = ١ **سم** ، **الوتر** ½ A . ½ = ٢ **سم**

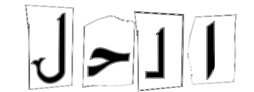
E ∠ . = ٣٠° ، ∠ A = ٦٠°

E ∠ **ب** A . = ٦٠° - ٤٥° = ١٥°

اثبت أنه لكل عدد صحيح فردي S

فإن: د(S) = S^٤ – ٤ S^٢ + ٣ تقبل القسمة على ٤٨

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات – ٢٠٠١)



نفرض أن : S = ٢ X - ١

د(S) = S^٤ – ٤ S^٢ + ٣ = (S^٢ – ٣) (S^٢ – ١)

د(S) = (S^٢ – ٣) (S – ١) (S + ١)

د(S) = [(٢ X - ١)^٢ – ٣] (٢ X - ١ +١) (٢ X - ١ -١)

د(S) = [(٢ X - ١)^٢ – ٣] (٢ X - ١ -١) (٢ X - ١ + ١)

د(S) = (٤ X^٢ - ٤ X - ٢) (٢ X - ٢) × ٢ X

د(S) = (٤ X^٢ - ٤ X - ٢) (٤ X^٢ - ٤ X)

د(S) = ٨ X (X - ١) (٢ X^٢ - ٢ X - ١)

والآن أحد العددين الصحيحين : X أو (X - ١) عدد زوجي ، ومن ذلك د(S) تقبل القسمة على :
(٨ × ٢) ، أي تقبل القسمة على العدد : ١٦
والآن نحاول إثبات أن: د(S) تقبل القسمة على العدد٣

نضع : X = صفر ومنها : د(S) = صفر (تقبل القسمة على ٣)

نضع : X = ١ومنها : د(S) = صفر (تقبل القسمة على ٣)

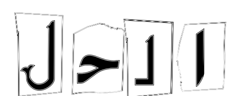
نضع : X = ٢ومنها : د(S) = ٤٨(تقبل القسمة على ٣)

E د(S) = S^٤ – ٤ S^٢ + ٣ تقبل القسمة على ٤٨

إذا كانت س، ص **أعداداً حقيقية لا تساوي الصفر ، اثبت أن:**

$$\left|\frac{س}{ص}+\frac{ص}{س}\right| \geq ٢$$

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات– ٢٠٠١)



$$\left|\frac{س}{ص}+\frac{ص}{س}\right| \geq ٢ \iff \left|\frac{س^٢+ص^٢}{س\ ص}\right| \geq ٢$$

$$\iff \left|س^٢+ص^٢\right| \geq ٢س\ ص$$

$$\iff \left|س^٢\right| + \left|ص^٢\right| \geq ٢\left|س\right|\left|ص\right|$$

$$\iff \left|س^٢\right| - ٢\left|س\right|\left|ص\right| + \left|ص^٢\right| \geq ٠$$

$$\iff \left(\left|س\right| - \left|ص\right|\right)^٢ \geq ٠$$

العلاقة الأخيرة صحيحة لأن أي كمية مربعة F الصفر

ومنها العلاقة التي بدأنا بها صحيحة

٦٠

إذا كانت : س، ص، ع **أعداد موجبة تحقق النظام :-**

س + ص^{٢} + ٢ س ع = ٢٩
ص+ ع^{٢} + ٢ س ص = ١٨
ع + س^{٢} + ٢ ص ع = ٢٥

أوجد : س + ص + ع

(المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية-٢٠٠٣)

الحل

نفرض أن : س + ص^{٢} + ٢ س ع = ٢٩ ⟵ **(١)**
ص+ ع^{٢} + ٢ س ص = ١٨ ⟵ **(٢)**
ع + س^{٢} + ٢ ص ع = ٢٥ ⟵ **(٣)**

بجمع : (١) ، (٢) ، (٣)

(س + ص + ع) + (س^{٢} + ص^{٢}+ ع^{٢} + ٢ س ص + ٢ س ع + ٢ ص ع) = ٧٢

D (س + ص + ع)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}+ ع^{٢} + ٢ س ص + ٢ س ع + ٢ ص ع

E (س + ص + ع) + (س + ص + ع)^{٢} = ٧٢

نفرض أن : س + ص + ع = A

E A^{٢} + A - ٧٢ = صفر

E (A + ٩) (A - ٨) = صفر

E A = - ٩ (مرفوض)

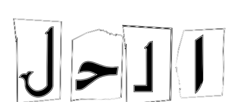
، E A = ٨

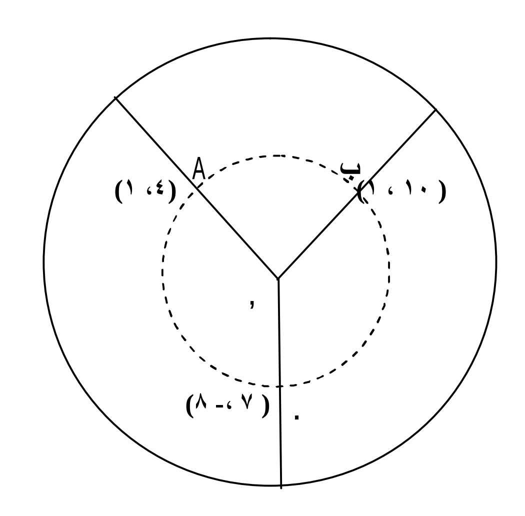
E س + ص + ع = ٨

إذا كانت النقاط A(٤ ، ١) ، ب (٧ ، - ٨) ، . (١٠ ، ١) هي منتصفات أنصاف أقطار الدائرة ,

احسب طول نصف قطرها

(المصدر : المسابقة الكندية الموحدة-٢٠٠٣)





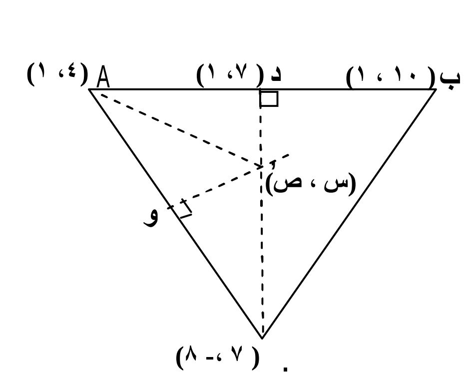
A D ، ب ، . منتصفات أنصاف أقطار الدائرة : ,

E ½ , ½ . ½ = A½ , ½= ½ , ب½

AE ، ب ، . تقع على دائرة واحدة مركزها : ,

E نفرض أن إحداثيات مركز الدائرة , هي (س، ص)

D الدائرة هو تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث A . ب



، وحيث أن إحداثيا النقطة د = $\left(\frac{٤+١٠}{٢} ، \frac{١+١}{٢} \right)$ **= (٧ ، ١)**

وإحداثيا النقطة . = (٧ ، - ٨)



E المستقيم د . يوازي المحور X

E س = ٧

E ½ A , ½ = ½ , ½ .

E $\sqrt{(ص - ١)^٢ + ((٧ - ٤))^٢} = \sqrt{(٧ - ٧)^٢ + (ص + ٨)^٢}$ **(بالتربيع)**

E $٣^٢ + (ص - ١)^٢ = (ص + ٨)^٢$

٩ + $ص^٢$ **– ٢ ص + ١ =** $ص^٢$ **+ ١٦ ص + ٦٤**

E ص = - ٣

E احداثيا , =(٧ ، - ٣)

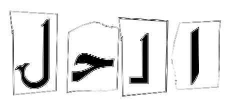
A½ , ½= $\sqrt{(٧ - ٧)^٢ + (- ٣ + ٨)^٢}$ **= ٥وحدات**

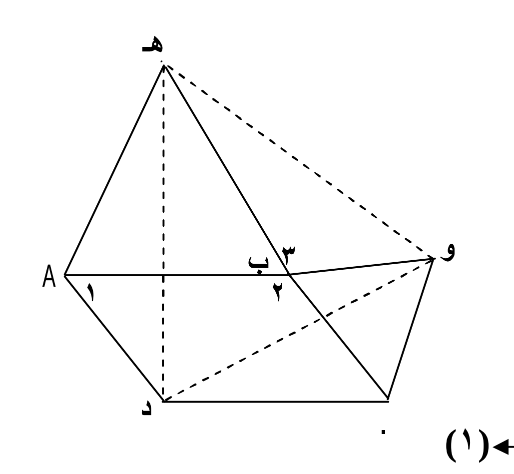
E نصف قطر الدائرة الكبرى = ١٠وحدات

علي الشكل : Aب . د متوازي أضلاع ، رسم على ضلعيه ب . ، ب A المثلثان المتطابقان الأضلاع ب و . ، A ب هـ على الترتيب.

اثبت أن المثلث : د و هـ متطابق الأضلاع

(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية- التصفية الرابعة-٢٠٠٣)





D الشكل : Aب . د متوازي أضلاع

E Q ∠ ١ + Q ∠ ٢ = ١٨٠°

في]] د Aهـ ، و ب هـ

D A½ د½= ½ب . ½= ½و ب ½ ←(١)

D A½ ب½= ½ A½ هـ ½ = ½هـ ب ½ ←(٢)

، D Q ∠ ٢ + Q ∠ ٣ + ٦٠° + ٦٠° = ٣٦٠°

E Q ∠ ٢ + Q ∠ ٣ = ٢٤٠°

E Q ∠ ٢ + Q ∠ ٣ = ١٨٠° + ٦٠°

E Q ∠ ٢ + Q ∠ ٣ = Q ∠ ١ + Q ∠ ٢ + ٦٠°

E Q ∠ ٣ = Q ∠ ١ + ٦٠° = ∠ د A هـ ←(٣)

E من (١) ، (٢) ، (٣) يتطابق]] د Aهـ ، و ب هـ

وينتج أن : ½ د هـ ½ = ½و هـ ½

E] د و هـ متطابق الضلعين، كما ينتج من التطابق أن : ∠ وهـ ب = ∠A هـ د

D∠ د هـ و = ∠ د هـ ب + ∠ ب هـ و = ∠ د هـ ب + ∠A هـ د = ٦٠°

E] د و هـ متطابق الضلعين وقياس إحدى زواياه = ٦٠°

E] د و هـ متطابق الأضلاع.

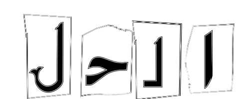
إذا كانت :

A س^{٣} + ب س^{٢} + . س + د = (س^{٢} + س – ٢)(س – ٤) – (س + ٢)(س^{٢} - ٥س + ٤)

لكل قيم س .

أوجد قيمة : A + ب + . + د

(المصدر : المسابقة الكندية الموحدة- ٢٠٠٥/١١/٢٣)



الطرف الأيمن = (س^{٢} + س – ٢)(س – ٤) – (س + ٢)(س^{٢} - ٥س + ٤)

= (س – ١) (س + ٢) (س - ٤) – (س + ٢) (س – ٤) (س – ١)

= صفر

E A س^{٣} + ب س^{٢} + . س + د = صفر

E A = ب = . = د = صفر

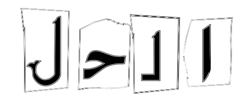
E A + ب + . + د = صفر

علي الشكل:

A ب .] فيه ½ . هـ ½ = $\frac{١}{٢}$ ½ A . ½ ،½ . د ½ = $\frac{١}{٣}$ ½ . ب ½

أوجد النسبة بين مساحة] A ب و، مساحة] A ب .

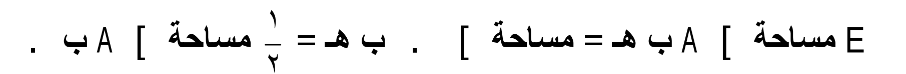
(المصدر : مسابقة ولاية ويسكنسون الأمريكية- اكتوبر-٢٠٠٢)



D ½ . هـ ½ = $\frac{١}{٢}$ ½ A . ½

E هـ منتصف A .

E ب هـ متوسط في] A ب .



E مساحة] A ب هـ = مساحة] . ب هـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة] A ب .

بالمثل : مساحة] A د . = $\frac{١}{٣}$ مساحة] A ب .

نفرض أن :

- مساحة] A و ب = S
- مساحة] A ب . = ٦ وحدات مربعة

E مساحة] A ب هـ = مساحة] . ب هـ = ٣ وحدات مربعة

، E مساحة] A د . = ٢ وحدة مربعة ، مساحة] A د ب = ٤ وحدات مربعة.

E مساحة] A و هـ = مساحة] A ب هـ - مساحة] A و ب = ٣ - S

D و هـ متوسط في] A و .

E مساحة] A و هـ = مساحة] . و هـ = ٣ - S

E مساحة] A و . = ٢(٣ - S) = ٦ – ٢ S

D مساحة] د و . = مساحة] A د . - مساحة] A و .

E مساحة] د و . = ٢ - (٦ – ٢ S) = ٢ S - ٤

D ½ب د½ = ٢½ د . ½

E مساحة] ب و د = ٢ مساحة] د و .

= ٢ (٢ S - ٤) = ٤ S - ٨

ولكن: مساحة] ب و د + مساحة] A و ب= مساحة] A ب د = ٤ وحدات مربعة

E ٤ S - ٨ + S = ٤

E ٥ S = ١٢

E S = ١٢/٥

E (مساحة] A و ب)/(مساحة] A ب .) = (١٢/٥)/٦ = ١٢/٣٠ = ٢/٥

٦٥

إذا كان:

جاس + جا ص+جا ع = صفر ، جتا س + جتا ص+ جتا ع= صفر

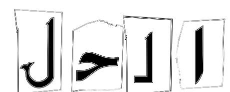
أثبت أن:

١) جتا (س – ص) = $-\frac{١}{٢}$

٢) جتا(هـ - س) + جتا(هـ - ص) + جتا(هـ - ع) = صفر (لأي زاوية هـ)

٣) جا^{٢} س+ جا^{٢} ص+ جا^{٢} ع = $\frac{٣}{٢}$

(المصدر : مسابقة ولاية ميتشجان الأمريكية- ديسمبر-٢٠٠٤)



(١) <u>إثبات أن : جتا (س – ص) =</u> $-\frac{١}{٢}$

D جاس + جا ص+ حا ع = صفر

E جاس + جا ص = - حا ع (بالتربيع)

E جا^{٢} س + جا^{٢} ص + ٢ جاس جا ص = حا^{٢} ع ← (١)

وبالمثل : جتا س + جتا ص = - حتا ع

E جتا^{٢} س + جتا^{٢} ص + ٢ جتا س جتا ص = حتا^{٢} ع ← (٢)

بجمع (١) ، (٢)

E جا^{٢} س + جا^{٢} ص + ٢ جاس جا ص + جتا^{٢} س + جتا^{٢} ص + ٢ جتا س جتا ص= حا^{٢} ع + حتا^{٢} ع

E (جا^{٢} س + جتا^{٢} س) + (جا^{٢} ص + جتا^{٢} ص)+ ٢ جاس جا ص + ٢ جتا س جتا ص= (حا^{٢} ع + حتا^{٢} ع)

E ١+١+ ٢ (جاس جا ص + جتا س جتا ص) = ١

E ٢ (جاس جا ص + جتا س جتا ص) = -١

E جاس جا ص + جتا س جتا ص = $-\frac{١}{٢}$

D جتا (س – ص) = جاس جا ص + جتا س جتا ص

E جتا (س – ص) = $-\frac{١}{٢}$

(٢) إثبات أن : جتا(هـ - س) + جتا(هـ - ص) + جتا(هـ - ع) = صفر **(لأي زاوية هـ)**

∵ جتا(هـ - س) + جتا(هـ - ص) + جتا(هـ - ع) = (جتا هـ جتا س- جاهـ جا س)
+ (جتا هـ جتا ص- جاهـ جا ص)
+ (جتا هـ جتا ع- جاهـ جاع)

= جتا هـ (جتا س + جتا ص + جتا ع) - جا هـ (جا س + جا ص + جا ع)

∵ جاس + جا ص+حا ع = صفر ، جتا س + جتا ص+ جتا ع= صفر

∴ جتا هـ (جتا س + جتا ص + جتا ع) - جا هـ (جا س + جا ص + جا ع)= صفر = الطرف الأيسر

(٣) إثبات أن : جا^{٢} س+ جا^{٢} ص+ جا^{٢} ع = $\frac{٣}{٢}$

نفرض أن :
هـ = س + ص + ع ، ونعوض عن ذلك في العلاقة (٢)

∴ جتا(هـ - س) + جتا(هـ - ص) + جتا(هـ - ع) = جتا(ص + ع) + جتا(س + ع) + جتا(س + ص) = ٠

∴ جتا ص حتا ع - جا ص جاع + جتا س حتا ع - جا س جاع + جتا س حتا ص- جا س جا ص= ٠

∴ جتا ص حتا ع + جتا س حتا ع + جتا س حتا ص = جا ص جاع + جا س جاع + جا س جا ص ⟵(١)

∵ جاس + جا ص+ جا ع = صفر ، جتا س + جتا ص+ جتا ع= صفر (بالتربيع)

∴ جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع + ٢(جا س جا ص+ جا ص جا ع + جا س جا ع) = ٠
، جتا ^{٢}س + جتا ^{٢}ص+ حتا^{٢} ع + ٢(جتا س جتا ص+ جتا ص جتا ع + جتا س جتا ع) = ٠ } ⟵(٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع = جتا ^{٢}س + جتا ^{٢}ص+ حتا^{٢} ع

بإضافة : جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع للطرفين

٢(جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع) = جتا ^{٢}س + جتا ^{٢}ص+ حتا^{٢} ع + جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع

∴٢(جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع) = (جا ^{٢}س + جتا ^{٢}س) + (جا ^{٢}ص+ + جتا ^{٢}ص)+ (حتا^{٢} ع + حا^{٢} ع)

∴٢(جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع) = ٣

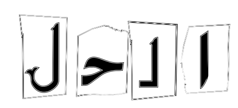
∴ جا ^{٢}س + جا ^{٢}ص+ حا^{٢} ع = $\frac{٣}{٢}$ = الطرف الأيسر

على الشكل:

Aب وتر في الدائرة الكبرى ، ب مركز الدائرة الصغرى التي تقطع الدائرة الكبرى في س ، ص وتقطع الوتر Aب في . ، إذا كان المستقيم ' هو العمود المنصف للقطعة A . .

اثبت أن :المستقيم ' يقطع القوس A س الأصغر في منتصفه.

(المصدر : مسابقة الأولمبية النيوزيلندية ـ ١٩٩٨ م)



نفرض أن :

- **المستقيم ' يقطع Aب في نقطة هـ.**
- **نصل : Aو ، و . ، و س ، . س ، س ب**

D و هـ y A . وينصفه

E ½Aو½ = ½و . ½

E Q (١) = Q (٢) ⟵ **(١)**

D الشكل : A ب س و رباعي دائري

E Q (١) + Q (٥) + Q (٦) = ١٨٠° ⟵ **(٢)**

D Q (٢) + Q (٣) + Q (٤) = ١٨٠° ⟵ **(٣)**

D ½ . ب ½ = ½ب س½ (أنصاف أقطار في دائرة واحدة)

E Q (٤) = Q (٦) ⟵ **(٤)**

من (٢) ، (٣) ، (٤) E Q (٣) = Q (٥)

E ½و . ½ = ½ و س ½

ولكن : ½Aو½ = ½و . ½

E ½Aو½ = ½ و س ½

E طول القوس : A و = طول القول : و س

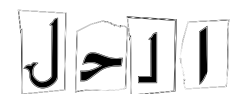
E المستقيم ' يقطع A س الأصغر في منتصفه.

بفرض أن :

+(س) = س د(س) **لكل** س HL **حيث** د **دالة قابلة للتفاضل** ، د(-٣) = ٢

أوجد : دً (-٣)

(المصدر : مسابقة معهد ECC الأمريكي للرياضيات– ٢٠٠٣)



D +(س) = س د(س)

E دً (س) = س × +(س) + د (س) × ١

= س × س د(س) + د (س)

= $س^٢$ د (س) + د (س)

= ($س^٢$ + ١) × د (س)

E دً (- ٣) = (٩ + ١) × ٢

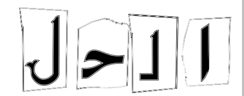
= ٢٠

٦٨

إذا كان : جا٢س = $\frac{٢٠٠٢}{٢٠٠٣}$ ، **حيث** ($\frac{٩ط}{٤}$ > س > $\frac{٥ط}{٤}$)

أوجد : جا س- جتا س

(المصدر : مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية ٢٨/٣/٢٠٠٤)



D **(جا س- جتا س)^{٢} = جا^{٢} س+ جتا^{٢} س - ٢ جا س جتا س**

E **(جا س- جتا س)^{٢} = ١- ٢ جا س جتا س**

D **جا٢س = ٢ جا س جتا س**

E **(جا س- جتا س)^{٢} = ١- جا ٢ س**

D **جا٢س =** $\frac{٢٠٠٢}{٢٠٠٣}$

E **(جا س- جتا س)^{٢} = ١-** $\frac{٢٠٠٢}{٢٠٠٣}$

E **(جا س- جتا س)^{٢} =** $\frac{١}{٢٠٠٣}$

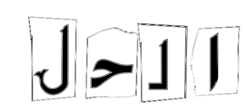
E **جا س- جتا س=** $\frac{١}{\sqrt{٢٠٠٣}}$

٦٩

إذا كانت : لو~س~ ص + لو~ص~ س = ٣ ، **حيث** س< ص

أوجد قيمة : لو~ص~ س

(المصدر : مسابقة مدارس ستانفورد الأمريكية ٢٠٠١)



D نفرض أن : لو~ص~ س = A

E س= ص^{A}

E ص = س$^{\frac{١}{A}}$

E لو~س~ ص = $\frac{١}{A}$

E لو~ص~ س + لو~س~ ص = A + $\frac{١}{A}$ = ٣

E A^{٢} – ٣ A + ١ = صفر

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

A = $\frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

D س< ص

E لو~ص~ س < ١

E A = $\frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}$

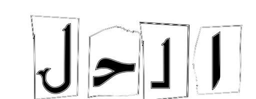
٧٠

إذا كان : (٤ س – ص)^{٤} (س + ص) = ١

أثبت أن :

$$\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''} - ٤ \frac{\text{س}}{\text{ص}} = ٣$$

(المصدر :اختبار الثانوية العامة لدولة السودان – ١٩٦٩م)



باشتقاق : (٤ س – ص)^{٤} (س + ص) = ١ بالنسبة إلى س

E ٤(٤ س – ص)^{٣} (٤ - $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$) (س + ص) + (١ + $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$) (٤س – ص)^{٤} = صفر

بالقسمة على : (٤ س – ص)^{٣}

E ٤(٤ - $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$) (س + ص) + (١ + $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$) (٤س – ص) = صفر

E ١٦ س + ١٦ ص – ٤ س $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$ - ٤ ص $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$ + ٤ س – ص + ٤ س $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$ - ص $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$ = ٠

E ٢٠س + ١٥ ص – ٥ ص $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$ = صفر

E ٢٠س + ١٥ ص = ٥ ص $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$

بالقسمة على :٥ ص

E ٤ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ + ٣ = $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$

E $\frac{\text{ص} ''}{\text{س} ''}$ - ٤ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ =٣

٧١

إذا كانت : ص = $e^{\sqrt{س^{٢}-١}}$

فاثبت أن : $س^{٢} ص^{٢} = (س^{٢} - ١)\left(\frac{"ص}{"س}\right)^{٢}$

(المصدر :تدريبات معهد الخوارزمي للرياضيات بجمهورية مصر العربية- ١٩٩٥م)

الحل

نفرض أن : $\sqrt{س^{٢}-١} = Y$ ← (١)

E **المعادلة (١) تأخذ الصورة**

E ص = $e^{ع}$ ← (٢)

باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة إلى س

E $\frac{"ص}{"س} = \frac{"}{"س}(e^{ع}) = e^{ع} \cdot \frac{"Y}{"س}$ ← (٣)

باشتقاق المعادلة (١) بالنسبة إلى س

E $\frac{"Y}{"س} = \frac{"}{"س}\left(\sqrt{س^{٢}-١}\right)$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س^{٢}-١}} \cdot \frac{"}{"س}(س^{٢}-١)$

$= \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}} = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}-١}}$ ← (٤)

بالتعويض عن $\frac{"Y}{"س}$ ، Y **من (٤) ، (١) في (٣)**

E $\frac{"ص}{"س} = e^{\sqrt{س^{٢}-١}} \cdot \frac{س}{\sqrt{س^{٢}-١}} = ص \cdot \frac{س}{\sqrt{س^{٢}-١}}$ **(بالتربيع)**

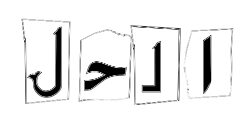
E $\left(\frac{"ص}{"س}\right)^{٢} = \frac{س^{٢}ص^{٢}}{س^{٢}-١}$

E $س^{٢} ص^{٢} = (س^{٢} - ١)\left(\frac{"ص}{"س}\right)^{٢}$

(" ، هـ) نقطة ثابتة في المستوى الإحداثي حيث " > صفر ، هـ > صفر ، رسم مستقيم يمر بالنقطة (" ، هـ) ويقطع الجزأين الموجبين من محوري الإحداثيات في : A ، ب .

اثبت أن : مساحة أصغر مثلث رءوسه النقط : و ، A ، ب هي ٢ " هـ ، حيث و نقطة الأصل (٠ ، ٠)

(المصدر : تدريبات على التفاضل للدكتور / كيوبا)



X
ب
ص - هـ
ص
(" ، هـ)
"
هـ
هـ
"
" - س
A
S
و
س

نفرض أن :

· ê و A ê = س

· ê ب و ê = ص

E مساحة] و A ب (,)= $\frac{1}{2}$× س × ص

من تشابه]] المظللين ينتج أن :-

$$\frac{"}{س - "} = \frac{ص - هـ}{هـ}$$

E (س - ") (ص – هـ) = " هـ

E س ص – س هـ - " ص + " هـ = " هـ

E س ص – س هـ - " ص = صفر

E ص (س - ") = س هـ

$$E\ ص = \frac{س\ هـ}{س - "}$$

ولكن : , = $\frac{1}{2}$× س × ص

$$E\ , = \frac{1}{2} × س × \frac{س\ هـ}{س - "} = \frac{هـ}{2} × \frac{س^2}{س - "}$$

وهذه دالة في س حيث س > "

$$E\frac{,"}{س"} = \frac{هـ}{2} × \frac{2س\ (س - ") - س^2}{(س - ")^2}$$

$$E \quad \frac{"\ ,}{"\ س} = \frac{هـ}{٢} \times \frac{س^{٢} - ٢"\ س}{(س - ")^{٢}}$$

E $\frac{"\ ,}{"\ س}$ = صفر عندما : س^{٢} - ٢" س = صفر أي عندما : س (س - ٢") = صفر

E س = ٢"   نقطة حرجة للدالة (لاحظ أن س = ٠ M مجال س)

$$E \quad \frac{"^{٢}\ ,}{"\ س^{٢}} = \frac{هـ}{٢} \times \frac{(٢ س - ٢ ")(س - ")٢ - ٢(س٢ - ٢" س)(س - ")}{(س - ")^{٤}}$$

$$E \quad \frac{"^{٢}\ ,}{"\ س^{٢}} = \frac{٢"^{٣} - ٠}{"^{٤}} = \frac{٢}{"} > صفر \quad (عندما : س = ٢")$$

E س = ٢" نقطة قيمة صغرى للدالة

E , تكون أصغر ما يمكن عندما : س = ٢"

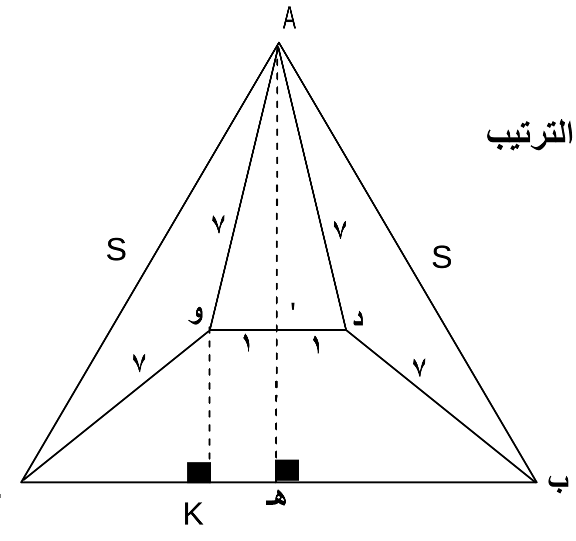
وتكون قيمة , = $\frac{هـ}{٢} \times \frac{٤"^{٢}}{"}$ = ٢ " هـ .

على الشكل : A ب . **مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه** S ، A د و **مثلث متطابق الضلعين فيه :-**

ê A دê = ê A ê و = ٧ **سم** ، ê د و ê = ٢ **سم ، رسم** د ب ، و . **فكان** ê د ب ê = ê . وê = ٧ **سم .**

أوجد قيمة S

(المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية كارولينا الجنوبية - ٢٠٠٢)



الحل

- **نسقط من** A **عمود يقطع :** د و ، ب . **في** ' ، **هـ على الترتيب**
- **نسقط من و عمود يقطع :**ب . **في** K
- **نفرض أن :** ê A ' ê = X
- **نفرض أن :**ê و Kê = Y

في] A ' و

ê X ê² = ٤٩ – ١ = ٤٨

ê X ê = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

ê D ' هـê = ê K و ê

E ê A هـê = X + Y

ولكن ê A هـê = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ S **(مقابل لزاوية قياسها ٦٠درجة في**] A ب . **)**

E $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ S = X + Y

E $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ S = ٤ $\sqrt{٣}$ + Y

E Y = $\sqrt{٣}$ ($\frac{S}{٢}$ - ٤)

في] و . K

ê و . ê² = Y² + ê K . ê²

$$٤٩ = \left[\sqrt{٣}\left(\frac{S}{٢} - ٤\right)\right]^{٢} + \left[\frac{S}{٢} - ١\right]^{٢}$$

$$٤٩ = ٣\left(\frac{S^{٢}}{٤} - ٤S + ١٦\right) + \left(\frac{S^{٢}}{٤} - S + ١\right)$$

$$٤٩ = \frac{٣S^{٢}}{٤} - ١٢S + ٤٨ + \frac{S^{٢}}{٤} - S + ١$$

$$٤٩ = \left(\frac{٣S^{٢}}{٤} + \frac{S^{٢}}{٤}\right) - (١٢S + S) + ٤٩$$

$$٤٩ = S^{٢} - ١٣S + ٤٩$$

$S^{٢} - ١٣S =$ **صفر**

$S(S - ١٣) =$ **صفر**

إما : $S =$ **صفر** **(مرفوض)**

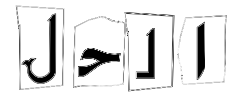
أو : $S = ١٣$ **سم.**

أوجد :

◆ $$\text{نهــا}_{S \to m} \left(\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} - ٢ S \right)$$

◆ $$\text{نهــا}_{N \to m} \sum_{R = ١}^{N} ٣ \left(١ + \frac{R}{N} \right)^{٢} \frac{١}{N}$$

(المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية كارولينا الجنوبية - ٢٠٠٢)



◆ **أولاً :** $$\text{نهــا}_{S \to m} \left(\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} - ٢ S \right)$$

$$\text{نهــا}_{S \to m} \left(\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} - ٢ S \right) \times \frac{\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} + ٢ S}{\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} + ٢ S}$$

$$\text{نهــا}_{S \to m} \frac{٤ S^{٢} + ٧ S - ٤ S^{٢}}{\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} + ٢ S}$$

$$\text{نهــا}_{S \to m} \frac{٧ S}{\sqrt{٤ S^{٢} + ٧ S} + ٢ S} \cdot \frac{\frac{١}{S}}{\frac{١}{S}}$$

$$\text{نهــا}_{S \to m} \frac{٧}{\sqrt{٤ + \frac{٧}{S}} + ٢} = \frac{٧}{٤}$$

ثانياً: $\underset{N \to m}{\text{نهـا}} \sum_{R=١}^{N} ٣\left(١ + \frac{R}{N}\right)^{٢} \frac{١}{N}$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \sum_{R=١}^{N} \left(١ + \frac{R}{N}\right)^{٢}$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \sum_{R=١}^{N} \left(١ + \frac{٢R}{N} + \frac{R^{٢}}{N^{٢}}\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \left(\sum_{R=١}^{N} ١ + \sum_{R=١}^{N} \frac{٢R}{N} + \sum_{R=١}^{N} \frac{R^{٢}}{N^{٢}}\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \left(\sum_{R=١}^{N} ١ + \frac{٢}{N}\left(\sum_{R=١}^{N} R\right) + \frac{١}{N^{٢}}\left(\sum_{R=١}^{N} R^{٢}\right)\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \left((١)(N) + \frac{٢}{N} \cdot \frac{N(N+١)}{٢} + \frac{١}{N^{٢}} \cdot \frac{N(N+١)(٢N+١)}{٦}\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \left(N + (N+١) + \frac{(N+١)(٢N+١)}{٦N}\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \frac{٣}{N} \left(٢N + ١ + \frac{٢N^{٢} + ٣N + ١}{٦N}\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \left(٦ + \frac{٣}{N} + \frac{٦N^{٢} + ٩N + ٣}{٦N^{٢}}\right)$$

$$= \underset{N \to m}{\text{نهـا}} \left(٦ + \frac{٣}{N} + ١ + \frac{٣}{٢N} + \frac{١}{٢N^{٢}}\right)$$

$$= ٦ + ٠ + ١ + ٠ + ٠ = ٧$$

أوجد

◆ $\int_{.}^{٩}$! ٤ - S! " S

◆ $\int \frac{٨\, e^{س} (e^{س} + ٣)}{\sqrt{e^{س٢} + ٦ e^{س} + ١}}$ س"

◆ ∫ جا S جتا S × $e^{\text{جا } S}$ " S

ا ل ح ل

◆ **أولاً :** $\int_{.}^{٩}$! ٤ - S! " S

نفرض أن :

X = ٤ - S!

E S! = ٤ - X

E S = X ٢ – ٨ X + ١٦

E S " = (٢ X - ٨) " X

لتغيير حدود التكامل نتبع التالي:

S : ٠ o ٩

X : (٤ - !) o (٤ - ٩!)

E X : ٤ o ١

E $\int_{.}^{٩}$! ٤ - S! " S = $\int_{٤}^{١}$!X (٢ X - ٨) " X

E $\int_{٤}^{١}$ X ¹ (٢ X - ٨) " X

$$E_{٤}^{١} (٢ X^{\frac{٣}{٢}} - ٨ X^{\frac{١}{٢}}) \, " X$$

$$= \left[٢ \left(\frac{X^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} \right) - ٨ \left(\frac{X^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right) \right]_{٤}^{١}$$

$$= \left[\frac{٤}{٥} X^{\frac{٥}{٢}} - \frac{١٦}{٣} X^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٤}^{١}$$

$$= \left\{ \left(\frac{٤}{٥}\right)(١)^{\frac{٥}{٢}} - \left(\frac{١٦}{٣}\right)(١)^{\frac{٣}{٢}} \right\} - \left\{ \left(\frac{٤}{٥}\right)(٤)^{\frac{٥}{٢}} - \left(\frac{١٦}{٣}\right)(٤)^{\frac{٣}{٢}} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{٤}{٥}\right)(١) - \left(\frac{١٦}{٣}\right)(١) \right\} - \left\{ \left(\frac{٤}{٥}\right)(٣٢) - \left(\frac{١٦}{٣}\right)(٨) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{٤}{٥} - \frac{١٢٨}{٥} \right\} - \left\{ \frac{١٢٨}{٣} - \frac{١٦}{٣} \right\}$$

$$= \frac{١١٢}{٣} + \frac{-١٢٤}{٥}$$

$$= \frac{٥٦٠ - ٣٧٢}{١٥}$$

$$= \frac{١٨٨}{١٥}$$

ثانياً: $E \, \frac{٨ \, e^{س} \, (e^{س} + ٣)}{\sqrt{e^{٢س} + ٦ e^{س} + ١}} \, " س$

نفرض أن :

$$X = e^{٢س} + ٦ e^{س} + ١$$

$$" X = (٢ \times e^{٢س} + ٦ e^{س}) \, " س$$

X " = (٢ × $e^{س}$ $e^{س}$ + ٦ $e^{س}$) "س

X " = ٢ × $e^{س}$ ($e^{س}$ + ٣) "س

$\frac{١}{٢}$" X = $e^{س}$ (٣ + $e^{س}$) "س

D ⌉ $\frac{٨ \; e^{س} (٣+ e^{س})}{\sqrt{e^{٢س} + ٦ e^{س} + ١}}$ "س = ٨ ⌉ $\frac{١}{\sqrt{e^{٢س} + ٦ e^{س} + ١}}$ $e^{س}$ (٣+ $e^{س}$) "س

= ٨ ⌉ $\frac{١}{X!}$ ($\frac{١}{٢}$)" X = ٤ ⌉ $\frac{١}{X!}$ " X = ٤ ⌉ $X^{-\frac{١}{٢}}$ " X

= ٤ × $\frac{X^{\left(-\frac{١}{٢}\right)+١}}{\left(-\frac{١}{٢}\right)+١}$ + ث

= ٤ × $\frac{X^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}$ + ث

= ٨ × $X^{\frac{١}{٢}}$ + ث

= ٨ ($e^{٢س}$ + ٦ $e^{س}$ + ١ $)^{\frac{١}{٢}}$ + ث

= ٨ $\sqrt{e^{٢س} + ٦ e^{س} + ١}$ + ث

◆ **ثالثاً :** ⌡ جا S جتا S × $e^{\text{جا S}}$ " S

نفرض أن :

· X = جا S E " X = جتا S " S

E ⌡ جا S جتا S × $e^{\text{جا S}}$ " S = ⌡ جا S × $e^{\text{جا S}}$ جتا S " S

= ⌡ X e^{X} " X

سنستخدم قانون التكامل بالتجزيء: ⌡ ' "Y= ' Y - ⌡ Y " '

نفرض أن :

· ' = X E ' " = " X

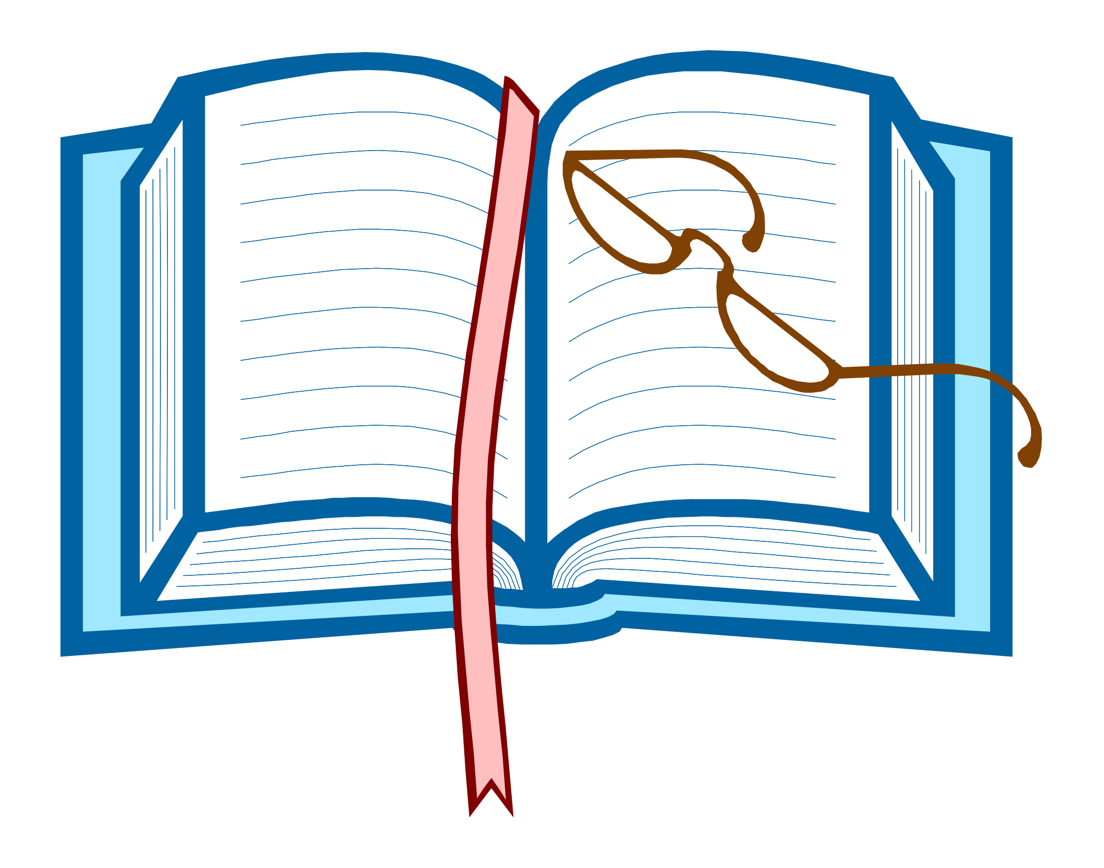
· "Y = e^{X} " X E Y = e^{X}

E ⌡ جا S جتا S × $e^{\text{جا S}}$ " S = X × e^{X} - ⌡ e^{X} " X

= e^{X} X - e^{X} + ث

= $e^{\text{جا S}}$ جا S - $e^{\text{جا S}}$ + ث.





زاوية حرة



برهان إقليدس لإثبات أن متتابعة الأعداد الأولية غير منتهية

إقليدس

نفرض أنه يوجد عدد أولي Q بحيث Q هو أكبر عدد أولي

ونفرض أن العدد الطبيعي K = (٢ × ٣ × ٥ × ٧ × ٠٠ × Q) + ١

واضح أن العدد K لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد

الأولية من ٢ إلى Q ------------ (١)

وواضح أن K > Q

وحيث أن Q أكبر عدد أولي (فرضاً)

E لا يوجد عدد أولي بين Q ، K ------------ (٢)

من (١) ، (٢)

E العدد K لا يقبل القسمة على أي عدد أولي بين ١ ، K

Eالعدد K ليس له سوى قاسمان موجبان هما ١ ، K

E K عدد أولي ، و هذا تناقض لأن Q أكبر عدد أولي ، K عدد أولي أكبر من Q .

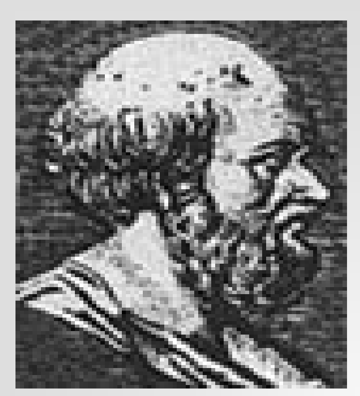
وقد نشأ التناقض من فرضنا أن Q هو أكبر عدد أولي.

E متتابعة الأعداد الأولية غير منتهية.

ترجع أهمية هذا البرهان السهل الرائع إلى أنه من البراهين الأولى التي تم استخدام التناقض فيها



قياس طول محيط الكرة الأرضية

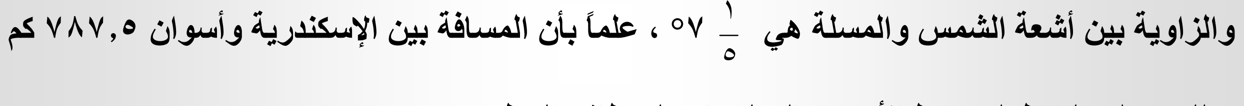


أراتوستين

أراتوستين :

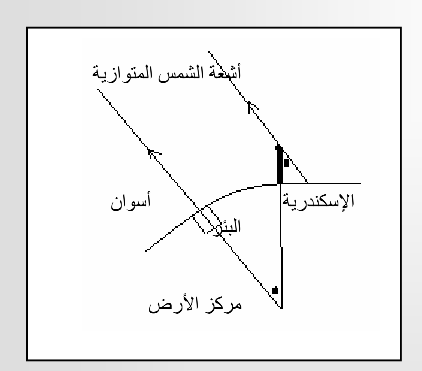
رياضي يوناني ولد حوالي عام ٢٤٨ قبل الميلاد وتوفي حوالي عام ١٩٢ قبل الميلاد . وقد عاش بعض الوقت بمدينة الإسكندرية المصرية . وقد وضع الطريقة المعروفة باسمه لإيجاد الأعداد الأولية من ١ إلى ١٠٠.

لقد لاحظ هذا العالم أنه في الساعة الثانية عشرة ظهراً من يوم ٢١ يونيه تصل الشمس إلى قاع بئر في مدينة أسوان جنوب مصر وأن أشعة الشمس تسقط في نفس اللحظة على مسلة بالإسكندرية فتحدث لها ظلاً



والزاوية بين أشعة الشمس والمسلة هي $7\frac{1}{5}°$ ، علماً بأن المسافة بين الإسكندرية وأسوان ٧٨٧,٥ كم

وللحصول على طول محيط الأرض بالمعلومات المعطاة والخطوات التالية حسب أراتوستين



طول محيط الأرض الزاوية المركزية بالتقدير الدائري

$$= 7\frac{1}{5} \times \frac{p}{180} = 0.1256$$

$$= = \frac{787.5}{0.1256} = 6269.9044 \text{ كم}$$

محيط الأرض = $2 \times 6269.9044 \times p = 39375$ كم

- نقصد بمحيط الأرض هنا طول دائرة عظمى مارة بالقطبين (خط طول)
- بمقاييس أحدث وبطرق أكثر دقة ،جد أن طول محيط الأرض = ٤٠٠٠٩ كم

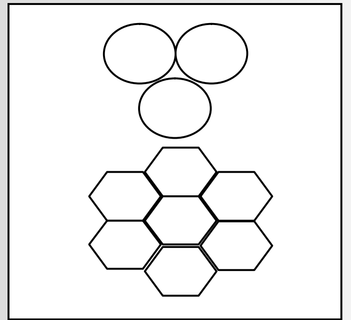


سبب بناء النحل خلاياه على شكل اسطوانات سداسية

إن الطريقة التي يبني بها النحل خلاياه هي في الحقيقة طريقة عجيبة ومنطقية ، فهو يبنيها بحيث يحصل على أكبر
حجم ممكن وبأقل كمية من الشمع ، وهذه الطريقة تعتمد على كثير من المفهومات والتعميمات الرياضية التي تستحق الدراسة المعملية والبحث العلمي . وإليك بعض من هذه المفهومات والتعميمات ، والتي كل منها يصلح أن يكون نشاطاً يمارسه الطلاب في الفصول أو في معمل الرياضيات .

- كل زاوية داخلية في مضلع منتظم ، عدد أضلاعه ; $= \frac{(ن-٢)-١٨٠}{ن}$
- كل زاوية خارجية في مضلع منتظم ، عدد أضلاعه ; $= \frac{٣٦٠}{ن}$
- معادلة مساحة كل من الدائرة ، والمربع ، والمثلث المتساوي الأضلاع والشكل السداسي بدلالة المحيط

وحتى تكون كمية الشمع أقل ما يمكن ، فإنه يجب البحث عن شكل لخلاياه لا يكون بينها فراغ ، فمثلا الاسطوانة الدائرية حجمها أكبر ما يكمن ولكنها تترك بينها فراغات (كما بالشكل ١) ، لذلك فشكل الخلايا
يجب أن يكون اسطوانات مضلعة منتظمة ليس بينها أي مسافات، أي أن مجموع الزوايا حول أي رأس من رؤوس قاعدة هذه الاسطوانة (المضلع المنتظم) يجب أن يكون ٣٦٠ درجة (كما بالشكل ٢) .



لنفرض أن عدد المضلعات التي تناسب ذلك هو K مضلع ومنه :-

$\frac{(ن-٢)-١٨٠}{ن} \times ك = ٣٦٠^\circ$ وبقليل من المعالجة الجبرية ينتج أن :-

(; $-٢)(ك-٢) = ٤$ وحيث أن الحل يجب أن يكون عدداً صحيحاً موجباً لذلك فإما:

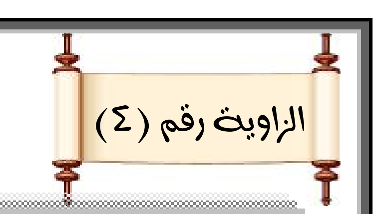
; = ٣ ، K = ٦ أو ; =٢ ٤ ، K = ٤ أو ; =٦ ، K = ٣

أن الأشكال المنتظمة
هي مثلث متطابق الأضلاع أو مربع أو شكل سداسي منتظم . والآن لنقارن مساحة هذه الأشكال بواسطة محيط كل منها . أي نريد مساحة أكبر وذات محيط أقل (مقطع الاسطوانة المنتظمة).

لنفرض أن محيط كل من هذه الأشكال هو S ومنها مساحة المثلث المتطابق الأضلاع = $\frac{س}{٣٦}$ ٢!

ومساحة المربع الذي له المحيط نفسه = $\frac{س}{١٦}$ ومساحة السداسي المنتظم = $\frac{س}{٢٤}$ ٣!

وأيضا لاحظ أن النحل عندما يصنع ست خلايا سداسية ، فإن الخلية السابعة تتكون في الوسط تلقائيا .
فسبحان الله :
﴿ الذي أعطى كل شيء خلقه ثم هدى﴾ سورة طه (٥٠)



دائرة أويلر

"الدائرة المارة بنقاط تقاطع ارتفاعات المثلث الحاد الزوايا مع أضلاع هذا المثلث، تمر أيضا بمنتصفات أضلاع نفس المثلث"

<u>الإثبات:</u>

كما في شكل ١ : نصل ن س ، س ع ، ص ع

D ن س = $\frac{١}{٢}$ A ب ، ع ص= $\frac{١}{٢}$ A ب

E |ن س |= | ص ع | ، D س ع // ب جـ

Eالشكل س ن ص ع شبه منحرف متساوي الساقين

E الشكل س ن ص ع شكل رباعي دائري

E النقاط س ، ن ، ص ، ع تمر بها دائرة واحدة ⟵ ١

وبالمثل:

عندما نصل م ع ، س ص ، ص ع (شكل ٢)

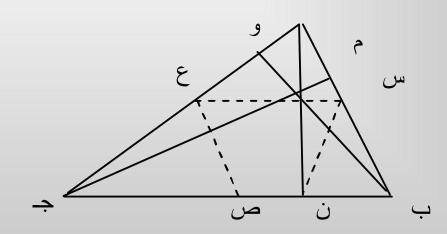
E النقاط س ، م ، ص ، ع تمر بها دائرة واحدة ⟵ ٢

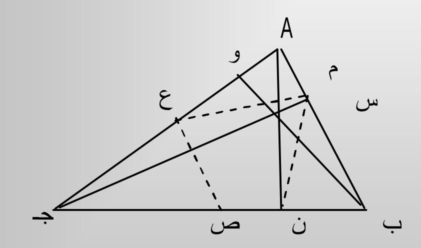
وبالمثل أيضا :

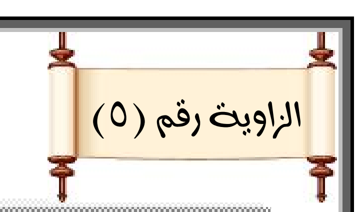
النقاط س ، ص ، ع ، و تمر بها دائرة واحدة ⟵ ٣

من ١، ٢ ،٣

E النقاط س، ص، ع، و ، ن ، م تمر بها نفس الدائرة.







العلاقة بين جذور المعادلة التكعيبية

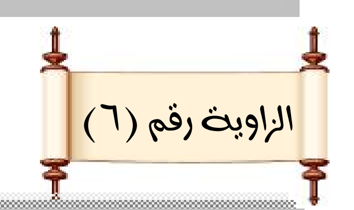
نفرض أن :- , ، N ، Y (حيث معامل س^{3} = ١)

جذور المعادلة س^{3} + A س^{2} + ب س + .

A -= Y + N + , E ⟵ (١)

ب = , Y +Y N +N , E ⟵ (٢)

. -= Y N , E ⟵ (٣)



الطريقة العامة لإيجاد الجذر التربيعي

نفرض أننا نريد على سبيل المثال إيجاد الجذر التربيع للعدد ٢٨٩

D العدد أكبر من ١٠٠ وأصغر من ٤٠٠ فيكون جذره واقعاً بين ١٠ ، ٢٠

E الجذر التربيعي للعدد ٢٨٩ يكون مكوناً من رقمين

لنفرض أن :-

$\sqrt{٢٨٩}$ = س + ١٠ ص حيث س ، ص L K

بالتربيع :-

٢٨٩ = س^{2} + ٢٠ س ص + ١٠٠ ص^{2}

، D العدد يقع بين ١٠ ، ٢٠ s E ص = ١

و على ذلك

٢٨٩ = س^{2} + ٢٠ س + ١٠٠

E س^{2} + ٢٠ س + ١٠٠- ٢٨٩ = ٠

E س^{2} + ٢٠ س – ١٨٩ =٠

E (س – ٧) (س + ٢٧) =٠

E س = ٧

E $\sqrt{٢٨٩}$ = ٧ + ١٠× ١ = ١٧

ومن المعلوم أن هذه الطريقة يمكن تطبيقها على أي عدد حتى ولو لم يكن مربعاً كاملاً وفي هذه الحالة يمكن إيجاد الجذر التربيعي لأي عدد عشري.



اللوغاريتمات

طريقة رياضية لحل مسألة باستخدام أسلوب حسابي أبسط بشكل متكرر. ومن الأمثلة الواضحة على ذلك عملية القسمة المطولة في الحساب .

ولقد جاء علم اللوغاريتمات متأخرا عن معظم العلوم الرياضية الأولية باعتباره معتمدا عليها. وحيث أن الفكرة الأساسية لهذا العلم تعتمد على تحويل عمليتي الضرب والقسمة المعقدتين إلى عمليتي جمع وطرح، فلقد كان الوصول إليها متزامنا من عدة أوجه.

ففي القرن الخامس الهجري / الحادي عشر الميلادي وضع ابن يونس قانونه المعروف في علم حساب المثلثات الذي يقضي بتحويل عملية الضرب إلى عملية جمع. وكان القانون على الصيغة التالية :

$$\text{جتا أ جتا ب} = \frac{١}{٢} [\text{جتا (أ + ب) + جتا (أ- ب)}]$$

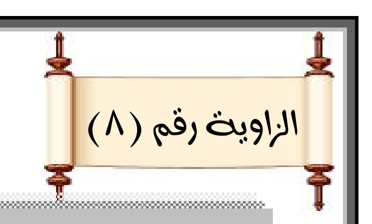
وهو الذي يقضي بتحويل عملية الضرب إلى عملية جمع، فكان بذلك واضعا أول حجر في تطوير علم اللوغاريتمات .

وفي القرن العاشر الهجري / السادس عشر الميلادي توصل ابن حمزة المغربي إلى إيجاد العلاقة بين المتواليتين الحسابية والهندسية. وقد شكلت نتائجه هذه حجر الأساس الذي اعتمد عليه العالم نابير الاسكتلندي لتطوير علم اللوغاريتمات .

ويطلق مصطلح اللوغاريتمات الآن على أنواع عديدة من حل المشاكل باستخدام سلسلة من الخطوات الميكانيكية كما هو الحال في تنصيب برنامج كمبيوتر. وقد تعرض هذه السلسلة في مخطط مسار البرنامج بحيث يسهل إتباع الخطوات الواردة بها .

وكما هو الحال في اللوغاريتمات المستخدمة في الحساب، تتراوح اللوغاريتمات المستخدمة في الكمبيوتر بين البساطة والتعقيد الشديد، إلا أنه يجب تحديد المهمة التي ينبغي للوغاريتمات أن تؤديها على أي حال من الأحوال، بمعنى أنه قد يحتوي التعريف على مصطلحات رياضية أو منطقية أو تجميع للبيانات أو التعليمات المكتوبة، ولكن يجب أن تكون المهمة المطلوبة ذاتها مذكورة بطريقة أو بأخرى. وباستخدام مصطلحات الكمبيوتر المعتادة، فإن هذا يعني أنه يجب أن تكون اللوغاريتمات قابلة للبرمجة حتى ولو ثبت أن المهام نفسها لا يمكن الوصول فيها لحل .

وفي أجهزة الكمبيوتر المركب بها دائرة كمبيوتر دقيقة، تعتبر هذه الدائرة نوعا من أنواع اللوغاريتمات. وحيث أن أجهزة الكمبيوتر تزداد تعقيدا ، فإن عددا أكبر وأكبر من لوغاريتمات برامج الكمبيوتر تأخذ شكل ما يعرف باسم البرامج التي تتحكم في الأجهزة، بمعنى أنها تصبح جزءا من دائرة الكمبيوتر الأساسية أو أنها تكون ملحقات ترفق بالجهاز بسهولة أو أنها تكون بمفردها في أجهزة خاصة مثل ماكينات جدول الرواتب في المكاتب. والآن هناك أنواع كثيرة مختلفة من لوغاريتمات البرامج التطبيقية كما أن نظما متقدمة جدا مثل لوغاريتمات الذكاء الاصطناعي قد تصبح من الأمور الشائعة في المستقبل.



الأرقام العربية

تعود قصة الأرقام العربية عند المسلمين إلى عام ١٥٤هـ / ٧٧١ م عندما وفد إلى بلاط الخليفة العباسي المنصور فلكي هندي، ومعه كتاب مشهور في الفلك والرياضيات هو سدهانتا لمؤلفه براهما جوبتا الذي وضعه في حوالي عام ٦هـ / ٦٢٨ م واستخدم فيه الأرقام التسعة والصفر كرقم عاشر. وقد أمر المنصور بترجمة الكتاب إلى اللغة العربية، وبأن يؤلف كتاب على نهجه يشرح للعرب سير الكواكب، وعهد بهذا العمل إلى الفلكي محمد بن إبراهيم الفزاري ، الذي ألف على نهجه كتابا أسماه السند هند الكبير واللفظة "سند هند" تعني باللغة الهندية (السنسكريتية) "الخلود."
وقد أخذ العرب بهذا الكتاب حتى عصر الخليفة المأمون. وفي عام ١٩٨هـ / ٨١٣ م استخدم الخوارزمي الأرقام الهندية في الأزياج ، ثم نشر في عام ٢١٠هـ / ٨٢٥ م رسالة الخوارزمي عن الأرقام الهندية".
وما لبث لفظ الجورثم أو الجورسم أن أصبح معناه في أوروبا في العصور الوسطى طريقة حسابية تقوم على النظام العشري. وعرفت هذه الأرقام أيضا بالأرقام الخوارزمية نسبة إلى الخوارزمي. ومن هذا الكتاب عرف المسلمون حساب الهنود، وأخذوا عنه نظام الترقيم، إذ وجدوه أفضل من حساب الجمل أو حساب أبجد المعمول به عندهم .
وكان لدى الهنود أشكال متعددة للأرقام، اختار العرب مجموعة منها وهذبوها وكونوا منها مجموعتين من الأرقام. وقد عرف الأول باسم الأرقام الهندية واستعمله العرب في المشرق العربي، وعرف الثاني باسم الأرقام العربية واستعمله العرب في أسبانيا والمغرب العربي. أما الطريقة المشرقية التي استعملها عرب بغداد فقد تطورت قليلا حتى أصبحت الأرقام التي تستعمل الآن في مصر والعراق ولبنان وبلاد العرب. وهي على الشكل التالي :

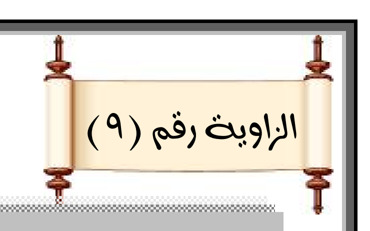
١- الأرقام الهندية ٩،٨،٧،٦،٥،٤،٣،٢،١
٢- الأرقام العربية

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

وتعرف الأرقام العربية كذلك بالأرقام الغبارية. وسميت هذه الأرقام بالغبارية لأنها كانت تكتب في بادئ الأمر بالإصبع أو بقلم من البوص على لوح أو منضدة مغطاة بطبقة رقيقة من التراب. وهي التي انتشر استعمالها في شمال أفريقيا والأندلس ودخلت إلى أوروبا عن طريق الأندلس ومن خلال المعاملات التجارية والرحلات بين الشرق والغرب، فقد وفد إلى بلاط الخلفاء العباسيين في بغداد أيام هارون الرشيد والمأمون سيل من الرحالة والزوار الذين قدموا إلى تلك المدينة العالمية من جهات نائية، وأشاعوا جوا عالميا فيها .
وتتميز الأرقام العربية(الغبارية) أنها مرتبة على أساس عدد الزوايا التي يضمها كل رقم، فالرقم واحد يتضمن زاوية واحدة، ورقم اثنان يتضمن زاويتين، والرقم ثلاثة يتضمن ثلاث زوايا - إلخ كما بالشكل التالي:

123456789

ثم دخل بعض التعديل على هذه الأشكال فأصبحت بالشكل المعروف(٩،٨،٧،٦،٥،٤،٣،٢،١). .
وأما سلسلة الأرقام الأخرى (الهندية) فتستخدم في أغلب الدول العربية والإسلامية، وقد حورها العرب من أشكال هندية عديدة، وقد خضعت الأشكال الدالة على الحروف إلى سلسلة من التعديلات عبر القرون حتى ظهرت الطباعة في القرن الخامس عشر فطبعت الأرقام بأشكالها الحالية تقريبا ومن ثم لم تتعرض هذه الأشكال لتغيرات كبيرة منذ ذلك التاريخ .



الأعداد المتحابة *

أول من ابتكر عددان متحابان هو الرياضي الأبرز فيثاغورث والعددان هما (٢٢٠،٢٨٤) والذي أطلق عليهما هذا الاسم لأنهما حققا الشرط (مجموع قواسم أي منهما يساوي العدد الآخر عدا العدد نفسه) والمراد بكلمة عدد هنا هو العدد الطبيعي الموجب فمثلاً العددان ٢٢٠،٢٨٤عددان متحابان لأن قواسم كل منهما هي:- قواسم ٢٨٤: ١، ٢، ٤ ، ٧١، ١٤٢

مجموع هذه القواسم

=١+٢+ ٢^٢ + ٧١+١٤٢=٢٢٠

أما قواسم العدد ٢٢٠ فهي:١،٢،٤،٥،١٠،٢٠،١١،٢٢،٤٤،٥٥،١١٠

ومجموع هذه القواسم=٢٨٤

والكثير من علماء الرياضيات اهتموا بالأعداد المتحابة اهتماماً كبيراً . فالعالم الرياضي الفرنسي بير فيرمات(١٦٠١-١٦٦٥م) والذي كانت له شهرة واسعة في نظريات الاحتمالات ونظريات الاعداد واستمرار الدالة وحساب التفاضل والذي كان فوق هذا كله مستشاراً لملك فرنسا لمدة ١٧عاماً ، اكتشف عددين متحابين في عام ١٦٣٦م وهما١٨٤١٦،١٧٢٩٦.

ثم جاء العالم الفرنسي الآخر ريني ديكارت (١٩٦-١٦٥٠م) والذي ذاع صيته في العمل في حقل الهندسة التحليلية واكتشف عددين متحابين آخرين وهما ٩٣٦٣٥٨٤،٩٤٣٧٠٥٦.

ثم أتي العالم النمساوي الفذ ليونارد أويلر(١٧٠٧-١٧٨٣م) الذي اشتهر بأعماله في دالتي بيتا وجاما و والمتغيرات المركبة، ونظريات المعادلات الجبرية والميكانيكية وابتدع في عام ١٧٥٠ميلادية تسعة وخمسون زوجاً من الأعداد المتحابة.

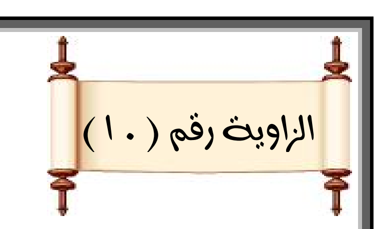
بل أن العالم الأمريكي ليونارد يوجين دكسن (١٨٧٤-١٩٥٤م) والذي نال شهرة واسعة في الجبر الخطي قد اكتشف عددين متحابين جديدين في عام ١٩١١م.

ويقول أستاذ الرياضيات المشهور أوستين آرو في كتابه (نظريات الأعداد وتاريخها): "إن الأعداد المتحابة عند المسلمين لعبت دوراً عظيماً في السحر والتنجيم والتنبؤ بخريطة البروج .

وقد ذكر عبد الرحمن ابن خلدون(المولود بتونس عام ١٣٣٢م) مؤسس علم الاجتماع في مقدمته:" إن الأعداد كانت احدى هواياته ، وقال إن الأشخاص المنشغلين بالطلاسم يؤكدون أن العددين المتحابين ٢٨٤،٢٢٠ لهما تأثير في إيجاد صداقة حميمة بين شخصين.

---

* من كتاب العلوم البحتة في الحضارة الإسلامية والعربية للدكتور على عبد الله الدفاع



في دراسة شملت مائتين من ألفاظ القرآن الكريم والتي تزيد عن السبعين ألف حرف إليك هذا الموجز.
إن معجزة الأرقام في القرآن الكريم موضوع مذهل حقا. والأرقام هنا تتحدث عن نفسها بنفسها، ولا مجال للمناقشة أو إبداء النظريات ، قال الله عز وجل:-
" سنريهم آياتنا في الآفاق وفي أنفسهم حتى يتبين لهم أنه الحق أو لم يكف بربك أنه على كل شيء شهيد" - فصلت٥٣
واليك بعضاً مما اكتشف من الإعجاز العددي لبعض الكلمات في القرآن الكريم.

الكلمة	التكرار	مضاد الكلمة	التكرار
الحياة	١٤٥	الموت	١٤٥
الصالحات	١٦٧	السيئات	١٦٧
الدنيا	١١٥	الآخرة	١١٥
اليسر	٣٦	العسر	١٢
الأبرار	٦	الفجار	٣
الجهر	١٦	العلانية	١٦

وهنا بعض المفردات التي قد يكون لها صلة ومنها:

الكلمة	التكرار	مضاد الكلمة	التكرار
المحبة	٨٣	الطاعة	٨٣
الهدى	٧٩	الرحمة	٧٩
السلام	٥٠	الطيبات	٥٠
الشدة	١٠٢	الصبر	١٠٢
المصيبة	٥٥	الشكر	٥٥
ابليس	١١	الاستعاذة بالله	١١
الجزاء	١١٧	المغفرة	٢٣٤ (ضعف)

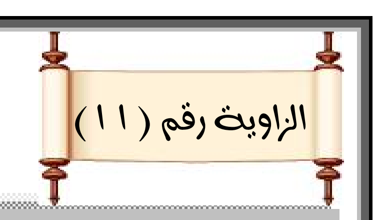
وكذلك اكتشف العلماء ما يلي :-

الكلمة	التكرار	الكلمة	التكرار
الملائكة	٨٨	الإنفاق	٧٣
الشياطين	٨٨	الرضا	٧٣
النفع	٥٠	الزكاة	٣٢
الفساد	٥٠	البركة	٣٢
الناس	٣٦٨	العقل	٤٩
الرسل	٣٦٨	النور	٤٩
اللسان	٢٥	محمد	٤
الموعظة	٢٥	الشريعة	٤
الذهب	٨	المسلمين	٤١
الترف	٨	الجهاد	٤١
الرجل	٢٤	السحر	٦٠
المرأة	٢٤	الفتنة	٦٠
الصلاة	٥	اليوم	٣٦٥
الشهر	١٢		

البحر	٣٢
البر	١٣
المجموع	٤٥

مجموع كلمات البحر نسبة للمجموع=٧١,١١١١١١١١١١١
مجموع كلمات البر نسبة للمجموع =٢٨,٨٨٨٨٨٨٨٨٨٨٩
العلم توصل إلى أن:
نسبة الماء على سطح الأرض =٧١,١١١١١١١١١١١
نسبة اليابسة على سطح الأرض = ٢٨,٨٨٨٨٨٨٨٨٨٨٩

سبحان الله العظيم



طرائف الحساب

تم العثور في صيف ١٤٠٠ هجرية (الموافق ١٩٨٠ ميلادية) في مكتبة ليدن في هولندا على مخطوط كتاب" طرائف الحساب " لأبو كامل المصري (٨٥٠-٩٣٠م) وقد كانت هذه المخطوطة في حالة جيدة ومن السهل قراءتها ، وقد ورد في هذا الكتاب مجموعة من المسائل الجبرية التي تحتوي على ثلاثة ، أو أربعة أو خمسة مجاهيل .وحل أبو كامل المصري هذه الأمثلة بإيجاد قيمة أحد المجاهيل بدلالة المجاهيل الأخرى . والإجابة بالأعداد الصحيحة حيث أنه يستعمل في سائل الكتاب الحيوانات والسيوف والرجال والنساء والأطفال (أي يستلزم أن تكون الأجوبة بالعدد الصحيح، وسنورد فيما يلي أمثلة لذلك وحلولها نقلاً من هذه المخطوطة النادرة.

مثال١:

دفع إليك مائة درهم فقيل لك : ابتع بها مائة طائر ، بطاً ودجاجاً وعصافير.فإذا كانت البطة بخمسة دراهم، والعصافير كل عشرين بدرهم، والدجاج كل واحد بدرهم ، فكم طيراً تشتري من كل نوع؟

الحل:

أفرض أن س = البط ، ص= العصافير، ز= الدجاج

E **أشتري من البط عدداً قيمته ٥ س درهم، وأشتري من العصافير عدداً قيمته ص/٢٠ درهم، واشتري من الدجاج عدداً قيمته ز درهم.**

E **ممكن التعبير عن صيغة السؤال بمعادلتين خطيتين هما:**

س + ص + ز = ١٠٠ ، ز = ١٠٠ – س – ص (١) ، ٥ س + ص/٢٠ + ز = ١٠٠ ، ز = ١٠٠ – ٥ س - ص/٢٠ (٢)

من (١) ، (٢) ١٠٠ – س – ص = ١٠٠ – ٥ س - ص/٢٠ E **٥ س + ص/٢٠ = س + ص ، ٤ س = ١٩/٢٠ ص**

١٩ ص = ٨٠ س ص = ٧٦/١٩ س + ٤/١٩ س ص = ٤ س + ٤/١٩ س

نظر أبو كامل إلى مقام معامل س فاستنتج أن س = ١٩ حيث يستلزم أن كل من س، ص، ز أعداداً صحيحة ومن ذلك وجد أن ص = ٨٠، ز = ١

مثال٢:

دفع إليك مائة درهم فقيل لك ابتع بها مائة طائر من خمسة أصناف بط ، حمام وفواخت وقنابر ودجاج ، كل بطة بدرهمين والحمام اثنين بدرهم والفواخت بثلاثة دراهم ، والقنابر بأربعة ، والدجاج كل واحدة بدرهم.

الحل:

افرض أن البط = س ، الحمام = ص، والفواخت = ز ، والقنابر = ع ، والدجاج = م

اشترى من البط عدد قيمته ٢ س درهم.

اشترى من الحمام عدد قيمته ص/٢ درهم. اشترى من الفواخت عدد قيمته ز/٣ درهم.

اشترى من القنابر عدد قيمته ع/٤ درهم.

اشترى من الدجاج عدد قيمته م درهم. ممكن التعبير عن صيغة السؤال بمعادلتين خطيتين وهما:-

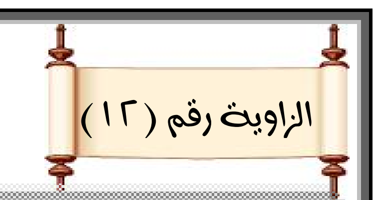
س + ص + ز + ع + م = ١٠٠ م = ١٠٠ – س – ص – ز – ع (١)

م = ١٠٠ – ٢ س- ص/٢ - ز/٣ - ع/٤ (٢)

من (١) ، (٢) ١٠٠ – س – ص – ز – ع= ١٠٠ – ٢ س- ص/٢ - ز/٣ - ع/٤

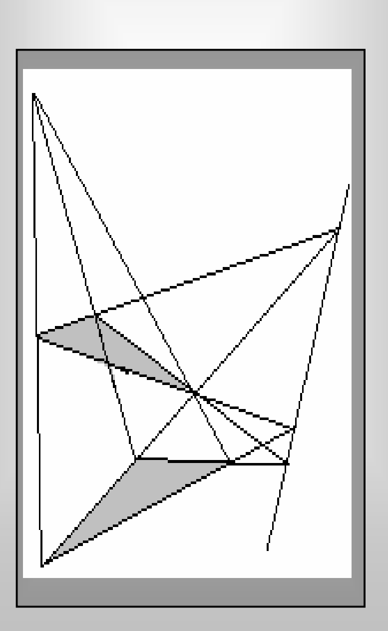
٢ س – س = (ص - ص/٢) + (ز - ز/٣) + (ع - ع/٤) ومنها س = ص/٢ + ٢/٣ ز + ٣/٤ ع

يذكر أبو كامل أن الأجوبة الممكنة لهذه المسألة التي تحتوي على خمسة مجاهيل = ٢٦٩٦ جواباً



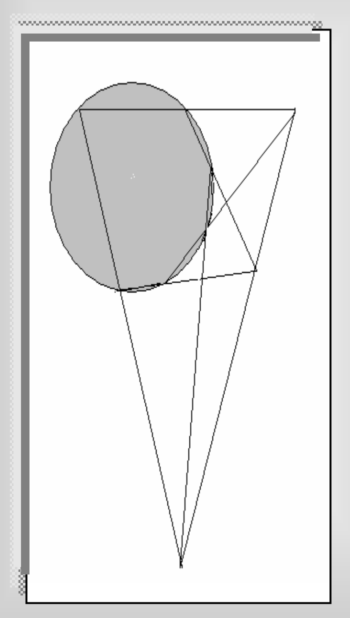
نظرية ديساريج

إذا تلاقت المستقيمات التي تمر بالرؤوس المتناظرة لمثلثين (في مستوى واحد أو في الفراغ) في نقطة فإن الأزواج المتناظرة من أضلاع المثلثين تتلاقى في ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة

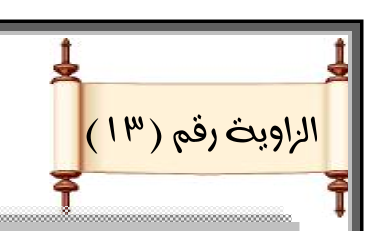


نظرية باسكال

إذا رسم شكل سداسي داخل دائرة فإن النقط الثلاث الناتجة من تقاطع ضلعين متقابلين في الشكل تقع على استقامة واحدة.

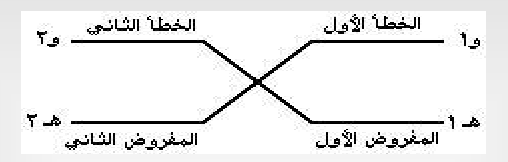


(باستخدام هذا السداسي العجيب ادعى باسكال أنه استطاع أن يستخلص أكثر من ٤٠٠ نتيجة)



طريق الخطأين لحل المعادلة من الدرجة الأولى

عرفت هذه الطريقة بالخطأين لاستخراج المجهول، وهي من ابتكار أبي موسى الخوارزمي ، وقد شاعت طريقة الخطأين عند الرياضيين المسلمين لبساطتها، وأصبح يعول عليها كثيرا كأداة أساسية في التحليل العلمي والرياضي .
وتعتمد طريقة الخطأين على فرض أي قيمة لمجهول وتسميه "المفروض الأول"، ثم تتصرف فيه بحسب المسألة، فإن طابق فهو المطلوب، وإن لم يطابق وكان بالزيادة أو النقصان فهو "الخطأ الأول" ثم يفرض مجهولا آخر وهو "المفروض الثاني"، فإن طابق فهو المطلوب، وإن لم يطابق فهو "الخطأ الثاني ."
ثم يضرب المفروض الأول في الخطأ الثاني ويكون الناتج" المحفوظ الأول". ويضرب المفروض الثاني في الخطأ الأول ويكون الناتج "المحفوظ الثاني ."



فإن كان الخطآن زائدين أو ناقصين فاقسم الفرق بين المحفوظين على الفرق بين الخطأين، وإن اختلفا فمجموع المحفوظين على مجموع الخطأين ليخرج المجهول .
وقد افترض الخوارزمي قيمتين تخمينيتين هما (هـ١) و(هـ٢). كما افترض أن الخطأ في كل من القيمتين هو (و١) و(و٢).فيكون

أهـ١ + ب = و١ (١)

أهـ٢ + ب = و٢ (٢)

وبطرح (٢) من (١) ينتج أن : أ(هـ١ - هـ٢) = و١ هـ٢ (٣)

وبضرب المعادلة (١) في هـ٢ والمعادلة (٢) في هـ١ ينتج أن :

أهـ١هـ٢ + ب هـ٢ = و١هـ٢ (٤)

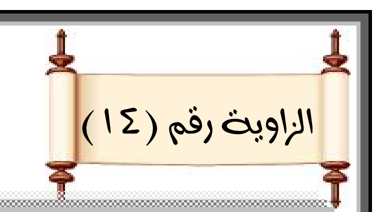
أهـ١هـ٢ + ب هـ١= و٢هـ١ (٥)

بطرح (٥) من (٤) يكون : ب(هـ٢ - هـ١) = و١هـ٢ - و٢هـ١ (٦)

وبقسمة (٦) على (٣) ينتج أن :

$$س = \frac{-ب}{أ} = \frac{و_١ هـ_٢ - و_٢ هـ_١}{و_١ - و_٢}$$

مثال: أوجد العدد الذي إذا أضيف إليه ثلثاه وثلاثة كان الناتج ١٨ طريقة الحل: ليكن المفروض الأول (٣) وبالتعويض في المعادلة٨ = ٣ + (٢ / ٣ * ٣) + ٣ :
ويكون الخطأ الأول هو ١٨ - ٨ = ١٠ وليكن المفروض الثاني (٦) وبالتعويض في المعادلة
١٣ = ٣ + (٢ / ٣ * ٦) + ٦
ويكون الخطأ الثاني هو ١٨ - ١٣ = ٥
والمحفوظ الأول = ٣ × ٥ = ١٥
والمحفوظ الثاني = ٦ × ١٠ = ٦٠
والفرق بين المحفوظين = ٦٠ - ١٥ = ٤٥
والفرق بين الخطأين =١٠ – ٥ = ٥
الجواب: ٤٥÷٥=٩



الحساب الهوائي

قسم العرب الحساب العملي إلى قسمين أساسيين: الحساب الغباري، والحساب الهوائي . والحساب الغباري هو الحساب الذي يحتاج استعماله إلى أدوات، أما الحساب الهوائي فهو الذي لا يحتاج في استعماله إلى أدوات. وقد اهتم العلماء المسلمون بالحساب الهوائي اهتماما خاصا لما يعكسه من سرعة بديهة في حل مسائل الحساب العملي الذي تحتاجه الحياة العامة من التجارة وغيرها، وللحساب الهوائي قوانين مذكورة في كتب الحساب العربية .

ومن أهم كتب الحساب العربية التي اهتمت بالحساب الهوائي كتابان للعالم المسلم أصبغ المهري ، وهي : الكامل في الحساب الهوائي ،

وكتاب الكافي في الحساب الهوائي ، ولكي تتضح أبسط الطرق للحساب الهوائي نقوم بإجراء عملية جمع رقمين هما: ٢٨١ +٢٧٥ وتكون خطوات الحل كالآتي :

٤٠٠=٢٠٠+٢٠٠

١٥٠=٧٠+٨٠

وتضاف إلى ٤٠٠ فيكون المجموع هو ٥٥٠

وجمع ١+٥=٦

ثم تضاف إلى ٥٥٠ فيكون المجموع ٥٥٦



